Quanteneffekte und Quantenparadoxa
Übungsblatt 2

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann — Ausgabe: Montag, 22.10.2018
Übungen: T. Kraft — Abgabe: Montag, 29.10.2018

---

1. Positiv-operatorwertige Maße

In der Quantenmechanik werden Messungen durch hermitesche Observablen beschrieben werden. Dies ist jedoch nicht die allgemeinste Messung in der Quantenmechanik. Die allgemeinste Messung in der Quantenmechanik sind so genannte positiv-operatorwertige Maße (Positive Operator Valued Measures, kurz POVMs). Ein POVM $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$ ist ein Satz positive semidefiniter Operatoren, für die gilt $\sum_i E_i = \mathbf{1}$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass im zweidimensionalen Hilbertraum für einen beliebigen Operator A folgende Aussagen äquivalent sind:

i. $\langle\psi| A |\psi\rangle \geq 0$ für alle $|\psi\rangle$.
ii. A ist hermitesch und hat keine negativen Eigenwerte.
iii. $A = A^\dagger$, $\det(A) \geq 0$ und $\mathrm{tr}(A) \geq 0$.

Welche Aussage ist nur in Dimension 2 gültig?

(b) Die Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis i berechnet sich dann mithilfe der bornschen Regel, $p_i = \langle\psi| E_i |\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass für einen gegebenen Zustand $|\psi\rangle$ und ein POVM $\mathcal{P}$ die p_i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung bilden.

(c) Betrachten Sie die Operatoren $E_1 = \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0|, E_2 = \frac{2}{3}|b\rangle\langle b|, E_3 = \frac{2}{3}|c\rangle\langle c|$ mit $|b\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}|1\rangle$ und $|c\rangle = -\frac{1}{2}|0\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}|1\rangle$. Zeigen Sie, dass diese Operatoren ein POVM bilden.

2. Kommutierende Observablen

Gegeben seien zwei nicht-kommutierende Observablen A, B, sodass $AB \neq BA$. Zeigen Sie, dass ein Zustand $|\psi\rangle$ existiert, sodass A bestimmt und B unbestimmt ist.

3. Entropische Unschärferelationen

Die berühmte Unschärferelation von Robertson ist

$$\Delta(A)\Delta(B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle|.$$

Ein Problem bei dieser Relation ist, dass die rechte Seite vom Zustand abhängt. Die rechte Seite kann also verschwinden und die Relation wird trivial. Es stellt sich die Frage, ob es Relationen gibt, die die Eigenschaften der Observablen A und B in einer zustandsunabhängigen Weise charakterisieren. Dazu verwendet man entropische Unschärferelationen, die den Vorteil haben, dass sie nur von den Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse abhängen und nicht von den Eigenwerten der Observablen. Sei also $P = (p_1, ..., p_n)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, dann ist die Shannon Entropie definiert durch $S(P) = -\sum_{k=1}^n p_k \log(p_k)$. Eine entropische Unschärferelation hat dann die Form

$$S(A) + S(B) \geq -2\log(c).$$

Hier sind $A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ und $B = \sum_j b_j |b_j\rangle\langle b_j|$ die Observablen und $c = \max_{i,j} |\langle a_i|b_j\rangle|$. Beachten Sie, dass die Notation so zu verstehen ist, dass $S(A)$ die Entropie von $S(P_A)$ ist, wobei

$$P_A = \left\{p_i = |\langle\psi|a_i\rangle|^2\right\}.$$

(a) Betrachten Sie den Fall $A = \sigma_x$ und $B = \sigma_y$. Was ist in diesem Fall c?

(b) Finden Sie einen Zustand, der diese Schranke erreicht.