

Quanteneffekte und Quantenparadoxa

Übungsblatt 9

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann
 Übungen: T. Kraft

Ausgabe: Mittwoch, 09.01.2019
 Abgabe: Montag, 14.01.2019

1. Änderung der Wellenfunktion unter kanonischen Transformationen

- (a) Betrachten Sie eine Lösung $\Psi(x, t)$ des freien Hamiltonoperators H . Führen Sie die kanonische Transformation durch, die $\hat{p} \mapsto -\hat{x}$ und $\hat{x} \mapsto \hat{p}$ abbildet. Wie ändert sich dabei die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$?
- (b) Betrachten Sie ein Teilchen im elektromagnetischen Feld. Ohne eine explizite Wahl der Eichung lautet die Schrödingergleichung

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})^2 + e\Phi \right] \psi = i\partial_t \psi.$$

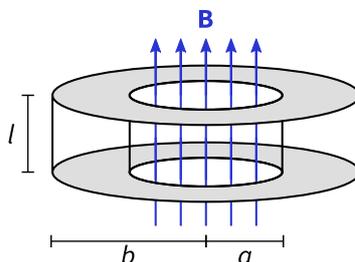
Eine Eichtransformation sei nun gegeben durch

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' + \nabla\chi \quad \text{und} \quad \Phi \mapsto \Phi' - \partial_t\chi.$$

Zeigen Sie, wie sich die Wellenfunktion unter dieser Eichtransformation ändert.

2. Aharonov–Bohm Effekt, gebundenes System

Ein Teilchen mit Ladung e und Masse m befinde sich in einem Hohlzylinder, so dass $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ und $|z| \leq l/2$. Im Inneren des Hohlzylinders ($x^2 + y^2 < a^2$) herrscht das Magnetfeld $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ ansonsten gilt $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.



- (a) Bestimmen Sie den Hamilton-Operator des Teilchens in Zylinderkoordinaten.
- (b) Nehmen Sie nun an, dass $l = a = b/2$ und betrachten Sie für die Schrödinger-Gleichung den Ansatz

$$\psi(r, \phi, z) = \sin(\pi\alpha r/l) e^{i\beta\phi} \cos(\pi\gamma z/l) r^u / N,$$

wobei α, β, γ Quantenzahlen und u, N Konstanten sind.

Hinweis: Verwenden Sie die dimensionslosen Größen

$$\lambda = \frac{a^2 e}{\hbar} B_0 \quad \text{sowie} \quad \epsilon = \frac{l^2 m}{\pi^2 \hbar^2} E_{\alpha, \beta, \gamma},$$

mit $E_{\alpha, \beta, \gamma}$ einem Eigenwert des Hamilton-Operators.

- (c) Welche Bedingungen folgen für α, β und γ aufgrund der Randbedingungen und Wohldefiniertheit?
- (d) Bestimmen Sie u und ϵ in Abhängigkeit von α, β und γ .
- (e) Welche Werte von λ sind zulässig für diesen Lösungstyp? Inwiefern bestätigt dies den Einfluss von \mathbf{B}_0 auf die Lösung?