Quanteneffekte und Quantenparadoxa
Übungsblatt 8

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann — Ausgabe: Mittwoch, 12.12.2018
Übungen: T. Kraft — Abgabe: Montag, 17.12.2018

---

1. Heuristisches Modell einer Fluoreszenz-Messung
Ein Atom mit vier Zuständen $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, und $|e\rangle$ sei zunächst im Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha_0 \, |0\rangle + \alpha_1 \, |1\rangle + \alpha_2 \, |2\rangle \, .$$

Der angeregte Zustand $|e\rangle$ zerfällt quasi sofort in den den Grundzustand $|0\rangle$ unter Abgabe eines Photons. Der "Zeiger" bei dieser Messung ist also das abgegebene Photon, wobei wir nur zwischen kein Photon $|\gamma_0\rangle$ und mindestens einem Photon $|\gamma_1\rangle$ unterscheiden.

Das Modell ist nun wie folgt: Zunächst wird an dem Atom eine unitäre Transformation $|0\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ durchgeführt durch Anwendung des Hamiltonoperators $H_D = \eta(|0\rangle\langle e| + |e\rangle\langle 0|)$ für die Dauer τ. Danach zerfällt der angeregte Zustand gemäß der (nicht-unitären) Transformation $R = |0\rangle\langle e|_S \otimes |\gamma_1\rangle\langle\gamma_0|$.

(a) Berechnen Sie den Zustand des Gesamtsystems (Atom und Zeiger) nach der Messung.

(b) Wie lautet nun der Zustand des Atoms nach der Messung wenn ein Photon bzw. kein Photon nachgewiesen wird?

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der verallgemeinerten Abbildung

$$\Phi \colon \rho \mapsto \sqrt{P}\rho\sqrt{P}$$

für eine Messung (siehe auch letztes Übungsblatt).

2. Harmonischer Oszillator als Zeiger
Der Zeiger eines Messapparats sei als harmonischer Oszillator modelliert und die zu messende Observable am System sei $A_S = |0\rangle\langle 0|$, der Hamiltonoperator ist also

$$H = g(t) A_S p_Z .$$

Nehmen Sie an, dass sich der Zeiger zunächst im Grundzustand befindet. Es gelte $g(t) = \alpha$ für $0 \leq t \leq \tau$ und $g(t) = 0$ sonst. Rechnen Sie in der Besetzungszahldarstellung.

(a) Berechnen Sie zunächst $\langle kj| \, \mathrm{e}^{-iH\tau/\hbar} \, |\ell 0\rangle$ für $k \neq 0$ oder $k \neq j$, wobei $|k0\rangle = |k\rangle_S \otimes |j\rangle_Z$ mit S das System und Z der Zeiger.

(b) Berechnen Sie nun $p_{00} = \langle 00| \, \mathrm{e}^{-iH\tau/\hbar} \, |00\rangle$ und zeigen Sie, dass $p_{00} \to 0$ für $\alpha \to \infty$.

(c) Wie kann man also das Messergebnis (0 oder 1) für A_S erhalten?

(d) Nun können Sie auch den (reduzierten) Zustand des Systems nach der Messung angeben, bedingt auf das Messergebnis.