Quanteneffekte und Quantenparadoxa
Übungsblatt 7

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann — Ausgabe: Montag, 26.11.2018
Übungen: T. Kraft — Abgabe: Montag, 03.12.2018

---

1. Reduzierte Zustände und Verschränkung

Sei $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ein beliebiger reiner Zustand mit

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{d-1} c_{ij} |ij\rangle .$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, das ein reiner Zustand separierbar ist, genau dann wenn der Rang der Koeffizientenmatrix $C = (c_{ij})$ gerade eins ist. Sonst ist der Zustand verschränkt.

Zeigen Sie, dass der Rang des reduzierten Zustandes $\varrho_{A,B} = \mathrm{tr}_{B,A}[|\psi\rangle\langle\psi|]$ dem Rang der Koeffizientenmatrix $C = (c_{ij})$ entspricht.

2. Purifizierung und Uhlmanns Theorem

Aus der Vorlesung kennen Sie bereits das Konzept der partiellen Spur. Man kann sich fragen, ob das Bilden der partiellen Spur auch umgekehrt werden kann, also ob man jeden gemischten Zustand als Teil eines reinen Zustandes auf einem erweiterten System auffassen kann. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass immer ein reiner Zustand $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ existiert, sodass $\varrho_A = \mathrm{tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}]$. Den Zustand $|\psi\rangle_{AB}$ nennt man eine Purifizierung von ϱ_A.

(a) Was ist die minimale Dimension von $\mathcal{H}_B$, sodass ein solcher Zustand existiert?

(b) Eine Purifizierung ist nie eindeutig. Zeigen Sie, dass zwei Purifizierungen $|\psi\rangle_{AB}$ und $|\phi\rangle_{AB}$ eines Zustandes ϱ_A durch eine Unitäre auf der Erweiterung $\mathcal{H}_B$ zusammenhängen, also das U_B existiert, sodass

$$|\psi\rangle_{AB} = (\mathbf{1} \otimes U_B) |\phi\rangle_{AB} .$$

3. Sorkins Beobachtung

Für eine Messung $B = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ sei die Abbildung

$$\phi_\alpha \colon \rho \mapsto \left(\sum_{i\in\alpha} \Gamma_i\right) \rho \left(\sum_{i\in\alpha} \Gamma_i\right)$$

gegeben, wobei $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Interferenzen k-ter Ordnung η_α mit $|\alpha| = k$ werden durch

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta\subseteq\alpha} \eta_\alpha, \quad \text{bzw.} \quad \eta_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{\beta\subsetneq\alpha} \eta_\alpha$$

rekursiv definiert. Sorkins Beobachtung ist, dass $\eta_\alpha = 0$ für $k > 2$. Nehmen Sie nun die verallgemeinerte Abbildung

$$\phi_\alpha \colon \rho \mapsto \sqrt{\sum_{i\in\alpha} X_i}\, \rho \sqrt{\sum_{i\in\alpha} X_i}$$

an. Hier ist $\sqrt{A}$ für $A \geq 0$ der eindeutige Operator, welcher $\sqrt{X}\sqrt{X} = X$ und $\sqrt{X} \geq 0$ erfüllt.

(a) Überzeugen Sie sich, dass die beiden Definitionen für ϕ_α äquivalent sind, falls $(X_1, X_2, \dots)$ Projektoren sind, die sich zu $\mathbb{1}$ addieren.

(b) Wir nehmen als Beispiel $n = 3$ mit $X_1 = a\,|0\rangle\langle 0|$, $X_2 = b\,|1\rangle\langle 1|$ und $X_3 = \mathbb{1} - X_1 - X_2$ wobei $0 \leq a$ und $0 \leq b \leq 1$. Was erhalten Sie nun für $\eta_{\{1,2,3\}}$? Wann ist $\eta_{\{1,2,3\}} = 0$?