Quanteneffekte und Quantenparadoxa
Übungsblatt 6

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann — Ausgabe: Montag, 19.11.2018
Übungen: T. Kraft — Abgabe: Montag, 26.11.2018

---

1. Gemischte Zustände

Dichteoperatoren ρ beschreiben gemischte Zustände. Sie sind vollständig dadurch charakterisiert, dass sie positiv semidefinite sind und Spur 1 haben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ genau nur für reine Zustände, d.h. solche mit Rang 1.

(b) Es gibt genau einen Dichteoperator, der unter allen unitären Transformationen gleichzeitig invariant ist. Welcher ist dies?

(c) Das Gemisch zweier reiner Zustände ist nur dann rein, wenn sie (bis auf eine globale Phase) gleich sind.

(d) Ein echt gemischter Zustand ρ, d.h., mit Rang größer 1, kann auf unendlich viele Arten durch mischen reiner Zustände entstehen,

$$\rho = \sum p_k \left|\phi_k\right\rangle\!\left\langle\phi_k\right|$$

mit $p_k > 0$, $\sum_k p_k = 1$, und $|\langle\phi_k|\phi_l\rangle| = 1$ nur für $k = l$.

2. Partielle Spur

Der reduzierte Zustand ρ_A eines bipartiten Zustands ρ_{AB} wird durch Bildung der partiellen Spur berechnet,

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_{i,j,k} |i\rangle\!\langle j|\, \langle i,k|\, \rho_{AB}\, |j,k\rangle\, .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_A \otimes \rho_B)$.

(b) Berechnen Sie ρ_A für $|\psi^-\rangle_{AB} = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$.

(c) Für tripartite Systeme kann man zwei Parteien zusammenfassen und somit ebenfalls reduzierte Zustände berechnen. Berechnen Sie $\rho_{AB} = \mathrm{tr}_C(\rho_{ABC})$ für

$$\begin{aligned} |\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC} &= (|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{3} \quad \text{und} \\ |W\rangle_{ABC} &= (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3} \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, dass für $\mathrm{tr}_C(|W\rangle\!\langle W|)$ jede Zerlegung als ein Gemisch reiner Zustände mindestens einen verschränkten Zustand enthält.

(d) Zeigen Sie, dass die Definition der partiellen Spur unabhängig von der Wahl der Basen der Parteien A und B sind.

3. Messungen

Eine Messung $(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$ an einem System im Zustand ρ, welche Ergebnis k liefert, induziert die kanonische Transformation

$$\rho \mapsto (\Pi_k \rho \Pi_k)/\,\mathrm{tr}(\rho \Pi_k).$$

Falls die Messung durchgeführt wurde, jedoch das Ergebnis unbekannt ist, so ist die Transformation dementsprechend

$$\rho \mapsto \sum_k \Pi_k \rho \Pi_k.$$

(a) Die Observable $A = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ werde an $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle + \gamma\,|2\rangle$ durchgeführt, das Ergebnis wird jedoch nicht aufgezeichnet. Welche nachfolgenden Messungen bleiben von dieser ersten Messung ungestört?

(b) Am Singulettzustand $|\psi^-\rangle_{AB}$ misst B entweder σ_x oder σ_z. Berechnen Sie jeweils die reduzierten Zustände für A, einmal wenn das Ergebnis der Messung bekannt ist und einmal, falls nicht.

(c) An einem System wird die Transformation

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle + \gamma\,|2\rangle \mapsto \alpha\,|00\rangle_{AB} + \beta\,|11\rangle_{AB} + \gamma\,|21\rangle_{AB}$$

durchgeführt. Ist diese Transformation unitär? Berechnen Sie den reduzierten Zustand ρ_A nach der Transformation. Inwiefern wurde hier die Observable A aus Aufgabenteil (a) implementiert?

(d) Es werden nacheinander, für $k = 1, 2, \ldots, n$, die Observablen $B_k = \mathbb{1} - 2\,|\eta_k\rangle\langle\eta_k|$ an einem System im Zustand $|0\rangle$ gemessen, wobei $|\eta_k\rangle = \cos[\pi k/(2n)]\,|0\rangle + \sin[\pi k/(2n)]\,|1\rangle$. Wie es der Zufall so will, wird bei jeder Messung der Ausgang -1 registriert. In welchem Zustand ist das System am Ende? Verwenden Sie Numerik um für $n = 1 \ldots 100$ die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass jeder Ausgang -1 ist.