Quanteneffekte und Quantenparadoxa
Übungsblatt 3

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann — Ausgabe: Montag, 29.10.2018
Übungen: T. Kraft — Abgabe: Montag, 05.11.2018

---

1. Verschränkung

Sind die folgenden Zustände verschränkt oder separierbar? Bestimmen Sie dazu die Matrix der Koeffizienten (ψ_{ij}) und bestimmen die deren Rang. Sollte der Zustand separierbar sein schreiben Sie den Zustand in der Form $|\psi\rangle = |a\rangle\,|b\rangle$.

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= |00\rangle + |11\rangle \\
|\psi_2\rangle &= |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \\
|\psi_3\rangle &= |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\
|\psi_4\rangle &= |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle
\end{aligned}$$

2. Der antisymmetrische Bell-Zustand

Aus der Vorlesung kennen Sie bereits den verschränkten Zustand $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, ein so genannter Bell-Zustand. Dieser Zustand hat einige sehr nützliche Eigenschaften, die in dieser Aufgabe nachgerechnet werden sollen.

(a) Zeigen Sie, dass für die zwei Observablen $A = \vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}$ und $B = \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}$ der Erwartungswert geschrieben werden kann als $\langle\psi^-|\, A \otimes B\, |\psi^-\rangle = -(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$.

(b) Angenommen, man misst die Observable σ_1 auf dem System A und bekommt das Ergebnis $+1$, bestimmen Sie den Zustand des Systems B nach der Messung. Was passiert, wenn man das Ergebnis -1 bekommt?

(c) Eine interessant Eigenschaft dieses Zustandes ist seine Invarianz unter beliebigen lokalen unitären Transformationen, das heißt $U \otimes U\, |\psi^-\rangle = |\psi^-\rangle$. Zeigen Sie, dass dies der Fall ist.

3. Die Tsirelson-Schranke

Gegeben seien vier Observablen A_1, A_2 und B_1, B_2 mit Ausgängen ± 1. Man definiert den Bell Operator wie folgt

$$\mathcal{B} = A_1 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_2 + A_1 \otimes B_2 - A_2 \otimes B_2.$$

Damit lautet die CHSH Ungleichung $\langle\mathcal{B}\rangle \leq 2\sqrt{2}$. Die obere Schranke wird als Tsirelson-Schranke bezeichnet.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass das Quadrat des Operators $\mathcal{B}$ von folgender Form ist $\mathcal{B}^2 = 4\mathbf{1} - [A_1, A_2] \otimes [B_1, B_2]$

(b) Berechnen Sie nun folgenden Ausdruck $\max_{|\psi\rangle} \langle \mathcal{B}^2 \rangle$ und verwenden Sie dann die Tatsache, dass $\langle\mathcal{B}\rangle^2 \leq \langle\mathcal{B}^2\rangle$ gilt, um die Tsirelson Schranke zu erhalten.

4. Popescu–Rohrlich Box

Wir haben gezeigt, dass die Quantenmechanik für den Bell-Operator einen maximalen Wert $\langle\mathcal{B}\rangle = 2\sqrt{2}$ erlaubt. Es ergibt sich die Frage, warum nicht noch höhere Werte möglich sind. Der Bell Operator der CHSH Ungleichung besteht aus vier Termen, die alle Werte im Bereich $[-1; +1]$ annehmen können. Deshalb ist das rein algebraische Maximum der CHSH Ungleichung $\langle \mathcal{B} \rangle = 4$. Man könnte vermuten, dass Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die diesen Wert erreichen, die Lokalitätsbedingung

$$p(a_i|A_i) \equiv \sum_{b_j=\pm 1} p(a_i, b_j|A_i, B_j)$$

verletzen, also eine instantane Signalübertragung zwischen den beiden Parteien ermöglichen. Das dies jedoch nicht der Fall ist, zeigt das Beispiel der so genannten Popescu–Rohrlich Box. Diese abstrakte Box erzeugt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

		A_1		A_2	
		$+1$	-1	$+1$	-1
B_1	$+1$	$1/2$	0	$1/2$	0
	-1	0	$1/2$	0	$1/2$
B_2	$+1$	$1/2$	0	0	$1/2$
	-1	0	$1/2$	$1/2$	0

Die Tabelle ist so zu lesen, dass bei Messung von A_1 und B_1 die Ergebnisse $(+1, +1)$ und $(-1, -1)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten, es ist also $\langle A_1 \times B_1 \rangle = 1$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung die Lokalitätsbedingung nicht verletzt.

(b) Zeigen Sie dann, dass tatsächlich $\langle \mathcal{B} \rangle = 4$ gilt.