Quanteneffekte und Quantenparadoxa
Übungsblatt 1

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann — Ausgabe: Mittwoch, 17.10.2018
Übungen: T. Kraft — Abgabe: Montag, 22.10.2018

---

1. Projektoren

Gegeben seien Projektoren P_1, P_2, P_3, die eine projektive Zerlegung der Identität bilden $P_1+P_2+P_3 = \mathbf{1}$. Zeigen Sie, dass $P_1P_2 = 0$ folgt.

2. Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der σ_i.

(b) Schreiben Sie die σ_i dann in der Spektralzerlegung.

(c) Schreiben Sie nun die σ_i in der oben gegebenen Form und in der Spektralzerlegung mithilfe der Dirac-Notation.

Sei nun $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ ein normierter Vektor im $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sigma_i$ eine komplexe 2×2 Matrix.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.

3. Wahrscheinlichkeiten

Seien X, Y Zufallsvariablen mit Ergebnisräumen $\Omega_X = \{0, 20, 25\}$, $\Omega_Y = \{0, 5, 10\}$ und $\Omega_{XY} = \Omega_X \times \Omega_Y$, mit
$$p_x(0) = \frac{1}{2}, p_x(20) = p_x(25) = \frac{1}{4},$$
$$p_y(0) = \frac{1}{2}, p_y(5) = p_y(10) = \frac{1}{4}$$
und
$$p_{xy}(0,5) = p_{xy}(0,10) = p_{xy}(20,0) = p_{xy}(25,0) = \frac{1}{4}.$$

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$ und $E(XY)$.

Sei nun $\Omega_X = \{50, 100\}$, $\Omega_Y = \{2, 10\}$ und $\Omega_{XY} = \Omega_X \times \Omega_Y$, mit
$$p_x(50) = p_x(100) = \frac{1}{2},$$
$$p_y(2) = p_y(10) = \frac{1}{2}$$
und
$$p_{xy}(100,2) = p_{xy}(50,10) = p_{xy}(100,10) = p_{xy}(50,2) = \frac{1}{4}.$$

(b) Berechnen Sie erneut die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$ und $E(XY)$. Was fällt Ihnen auf?