Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 8

Vorlesung: Otfried Gühne Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:30-10:00 (B030) und Di. 12:30-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 08.12.2017

1. Leiteroperatoren (3+3 points)

Der Ortsoperator kann mit Hilfe der Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ ausgedrückt werden:

$$Q = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \tag{1}$$

mit einer konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren Q^3 und Q^4 im Energieeigenzustand $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators.

2. Kohärente Zustände (2+1+2+2 points)

Der Displacement-Operator is wie folgt definiert:

$$D(z) = \exp(za^\dagger + z^* a) \tag{2}$$

mit $z \in \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass $D(z)$ unitär ist.

Ein kohärenter Zustand ist durch

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_n \frac{z^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle, \tag{3}$$

mit $z \in \mathbb{C}$ und den Energieeigenzuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators, definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $|z\rangle$ ein Eigenzustand des Absteigeoperators a ist.

(iii) Zeigen Sie, dass ein kohärenter Zustand durch die einmalige Anwendung des Displacement-Operators $D(z)$ auf den Vakuumszustand $|0\rangle$ erzeugt werden kann, d.h. $|z\rangle = D(z)|0\rangle$.

(iv) Berechnen Sie $D(z')|z\rangle$ für einen kohärenten Zustand $|z\rangle$.

3. Kohärente und thermische Lichtquellen (1+3+2+3 points)

Eine Mode des elektromagnetischen Feldes wird in der Quantenoptik durch einen harmonischen Oszillator beschrieben. Dabei ist der Besetzungszahloperator $N = a^\dagger a$ die Observable die angibt wieviele Photonen sich in der Mode befinden.

(i) Angenommen das elektromagnetische Feld in der Mode befindet sich im Zustand $|n\rangle$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Besetzungszahloperators $N = a^\dagger a$.

(ii) Nun nehmen wir an das elektromagnetische Feld befindet sich in einem kohärenten Zustand $|z\rangle$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Besetzungszahloperators $N = a^\dagger a$.

(iii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Besetzungszahloperators N (also der Photonenzahl) bezüglich eines kohärenten Zustands $|z\rangle$, das Ergebnis n zu erhalten.

Andererseits ist bekannt, dass für eine thermische Lichtquelle, die im Mittel $\bar{n}$ Photonen enthält, die Wahrscheinlichkeit n Photonen zu messen (zu detektieren) wie folgt gegeben ist:

$$p(n) = \frac{1}{(1+\bar{n})}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n . \tag{4}$$

(iv) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz bezüglich der Verteilung (4). Was ist der Unterschied zu der Verteilung in (iii).