Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 7

Vorlesung: Otfried Gühne   Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:30-10:00 (B030) und Di. 12:30-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 01.12.2017

1. Erwartungswerte (3+3 Punkte)

Sei $\psi(x) = \varphi(x)e^{ikx}$ eine Wellenfunktion mit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass der Ortserwartungswert bezüglich des Zustands ψ gleich a ist, wenn die Funktion φ symmetrisch um den Punkt a, d.h. $\varphi(a - x) = \varphi(a + x)$, ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Impulserwartungswert bezüglich ψ gleich $\hbar k$ ist. Rechnen Sie den Erwartungswert explizit, durch Ausnutzung der Definition des Impulsoperators, aus. Beachten Sie, dass die Funktion φ im unendlichen verschwinden muss (da sie Quadratintegrabel ist).

2. Fourier-Transformierte und Unschärfe (1+1+2+1+1 Punkte)

Die Wellenfunktion eines Quantensystems sei wie folgt definiert:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, x > 1, \\ 1 + x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(i) Normieren Sie ψ.

(ii) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(Q, \psi)$ der Ortsobservablen bezüglich des Zustands ψ.

(iii) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}$ der Wellenfunktion ψ und überprüfen Sie dass die resultierende Funktion normiert ist.
Tipp: Das Integral von $|\tilde{\psi}|^2$ kann mit Methoden der komplexen Analysis berechnet werden. Um dies zu vermeiden verwenden wir folgenden Trick: Zeigen Sie zuerst, dass das Integral von $|\tilde{\psi}|^2$ konvergiert (also endlich ist). Wenn das zutrifft, dürfen Sie die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iap}}{p^4} = a^3\pi \ \mathrm{sign}(a)/6$ verwenden um das Integral auszuwerten. Verwenden Sie die Formel auch für $a = 0$!

(iv) Benutzen Sie die Fourier-Transformierte um die Varianz $\mathrm{Var}(P, \psi)$ der Impulsobservablen bzgl. ψ zu berechnen. Tipp: Für die Integrale können Sie die selbe Strategie wie in (iii) verfolgen. Benutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iap}}{p^3} = -i \ a^2\pi \ \mathrm{sign}(a)/2$, und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iap}}{p^2} = -a\pi \ \mathrm{sign}(a)$.

(v) Berechnen Sie das Produkt aus den Wurzeln der Orts- und Impulsvarianz und vergleichen Sie es mit der unteren Schranke der Unschärferelation.

3. Der unendlich hohe Potentialtopf (1+3+2 Punkte)

Ein Teilchen ist in einem Potentialtopf der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |x| < a \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

gefangen.

(i) Was sind die Randbedingungen für die Lösung der zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung? Begründen Sie ihre Wahl.

(ii) Verwenden Sie den Ansatz $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ und die Randbedingungen aus (i), um die zeitunabhängigen Schrödingergleichung zu lösen. Wie lauten die Energieeigenwerte und -funktionen?

(iii) Was ist der (Energie-)Grundzustand des Teilchens? Wie lautet die Lösung der Schrödinger-Gleichung wenn wir die Energie $E = 0$ setzen?