Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 6

Vorlesung: Otfried Gühne Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:30-10:00 (B030) und Di. 12:30-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 24.11.2017

1. Funktionenräume (2+3+3 points)

Bisher haben wir uns nur mit endlichdimensionalen Hilberträumen beschäftigt (z.B. $\mathbb{C}^n$). Im folgenden betrachten wir den unendlichdimensionalen Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, wie er z.B. für die Beschreibung eines einzelnen Quantenteilchens gebraucht wird. Formell definiert man den Raum der quadratintegrablen Funktionen wie folgt:

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Im Raum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ wird die Vektoraddition und Skalarmultiplikation punktweiße definiert: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$. Das zugehörige Skalarprodukt zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ lautet:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) dx. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass (1) wirklich ein inneres Produkt definiert, d.h. es erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(a) $\langle f|f\rangle \geq 0$, und $\langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (Positivität)

(b) $\langle f|g\rangle^* = \langle g|f\rangle$

(c) $\langle f|g_1 + g_2\rangle = \langle f|g_1\rangle + \langle f|g_2\rangle$, und $\langle f|\lambda g\rangle = \lambda\langle f|g\rangle$ (Linearität im zweiten Argument)

Zeigen Sie, dass aus b) und c) semilinearität im ersten Argument folgt.

(ii) Ein inneres Produkt definiert immer eine dazugehörige Norm durch $\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass Quantenzustände durch normierte Vektoren im Hilbertraum gegeben sind. Normalisieren Sie die folgenden beiden Funktionen (auch Zustände oder Wellenfunktionen genannt):

$$g(x) = \frac{G(1+i)}{G^2 + (x - x_0)^2},$$

$$f(x) = \frac{G(1+i)}{\sqrt{G^2 + (x - x_0)^2}}.$$

(iii) Auch im undendlichdimensionalen Fall sind physikalische Observablen durch hermitesche Operatoren definiert. Im Allgemeinen bezeichnet ein Operator eine lineare Abbildung zwischen $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (oder einer Teilmenge $X \subset L^2(\mathbb{R})$) und $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Der Ortsoperator Q ist zum Beispiel definiert durch $(Qh)(x) = xh(x)$, mit $h \in L^2(\mathbb{R})$. Berechnen Sie den Ortserwartungswert bezüglich der Zustände f und g aus (ii). Der Ortserwartungswert ist wie folgt definiert $\langle Q\rangle = \langle f|Qf\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^*(Qf)(x)dx$.

2. Hermitesche Funktionen (4 points)

Die hermiteschen Funktionen $h_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, wobei $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ die Hermiteschen-Polynome bezeichnen, definieren eine Orthonormalbasis von $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, d.h. sie erfüllen die Relationen:

$$\langle h_m | h_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_m(x)^* h_n(x) dx = \delta_{mn}. \tag{2}$$

Außerdem, haben die Hermiteschen-Funktionen die folgenden Eigenschaften:

$$h_n'(x) = \sqrt{\frac{n}{2}} h_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} h_{n+1}(x) \ , \tag{3}$$

$$x h_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}} h_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} h_{n+1}(x). \tag{4}$$

Die Matrixelemente eines Operators A sind nun wie im endlichdimensionalen Fall definiert durch $A_{nm} = \langle h_n | A | h_m \rangle$.

Verwenden Sie die Eigenschaften der Hermiteschen-Funktionen um zu zeigen, dass die Matrixelemente des Kommutators $[Q, P]$ durch $[Q, P]_{nm} = \delta_{nm} i\hbar$ gegeben sind. Der Impulsoperator ist definiert durch $(Pf)(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} f(x)$, mit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

3. Kommutator-Relationen und Unbeschränkte Operatoren (1+2+4+2 points)

Seinen A und B beliebige Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ für die gilt:

$$[A, B] = c\mathbb{1}, \tag{5}$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{C}$ und $c \neq 0$.

(i) Kann es im endlichdimensionalen Fall Operatoren A und B (d.h. im Falle von Operatoren auf endlichdimensionalen Hilberträumen) geben welche die Relation (5) erfüllen? Geben Sie eine Begründung.

Des Weiteren sei die Operatornorm eines Operators A auf $\mathcal{H}$ wie folgt definiert:

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}, \quad \text{mit} \quad x \in \mathcal{H}. \tag{6}$$

für $x \in \mathcal{H}$. Insbesondere nennen wir einen Operator beschränkt wenn seine Operatornorm endlich ist ($||A|| < \infty$). Die Operatornorm $|| \cdot ||$ bildet eine Norm auf dem Raum der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$, und erfüllt somit die Norm-Eigenschaften: (a) $||A|| \geq 0$, und $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, (b) $||\lambda A|| = |\lambda| ||A||$, für $\lambda \in \mathbb{C}$, (c) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

(ii) Zeigen Sie, dass für zwei beschränkte Operatoren die folgende Eigenschaft gilt: $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Annahme A und B seien beschränkte Operatoren im Widerspruch zu der Kommutator-Relation (5) steht.
Tipp: Zeigen Sie per Induktion, dass aus (5) $B^n \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt. Betrachte dazu die Norm des Operators $[A, B^n]$ und benutze die Eigenschaft aus Teilaufgabe (ii), sowie die Kommutator-Relationen aus Aufg. 3 (ii) auf Übungsblatt 5.

(iv) Zeigen Sie, dass für Funtionen $f(x)$ und $g(p)$, die in einer Taylor-Reihe entwickelbar sind, die Operator-Relationen $[f(Q), P] = i\hbar f'(Q)$ und $[Q, g(P)] = i\hbar g'(P)$ gelten.