Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 5

Vorlesung: Otfried Gühne Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher

Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:30-10:00 (B030) und Di. 12:30-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 17.11.2017

1. Zeitentwicklung (3 + 3 points)

Wir betrachten ein Elektron dessen Spin an ein elektromagnetisches Feld $\vec{B} = B_0\vec{n}$ koppelt. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass der Spin eines Elektrons durch ein Zwei-Niveau-System (Qubit) beschrieben wird und die Zeitentwicklung durch den unitären Operator $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ definiert ist, wobei H den Hamiltonian bezeichnet. Im folgenden sei $H = -\alpha\hbar\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, $\alpha = \frac{1}{2}\gamma B_0$, mit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, und Konstanten B_0 und γ.

(i) Zeigen Sie, dass $U(t) = \cos(\alpha t)I + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\alpha t)\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$.

(ii) Berechnen Sie $U(\frac{\pi}{\gamma B_0})$, und wählen Sie einen Anfangszustand $|\psi(t=0)\rangle$ für den eine Messung der Observablen σ_y mit Sicherheit (d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1) das Ergebnis + ergibt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt dann eine Messung der Observablen σ_z zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{\gamma B_0}$ das Ergebnis +?

2. BB84 Protokoll für 3 Messungen (2+2+2 points)

Das 6-Zustand-Protokoll ist eine modifizierte Version des BB84 Protokolls (siehe Vorlesung). Dabei kodiert Alice jedes Bit ihres Schlüssels bezüglich einer von drei zufällig gewählten Basen, den Eigenbasen von σ_x, σ_y und σ_z, in ein Qubit (z.B. die Polarisation eines Photons) und sendet diese zu Bob. Anschließend, misst Bob jedes bei ihm ankommende Qubit zufällig in einer der drei Basen. Im Unterschied zum 6-Zustand-Protokoll werden im originalen BB84 Protokoll nur die Eigenbasen von σ_x und σ_z benutzt.

(i) Wie lang ist der gesiebte Schlüssel (d.h. der Schlüssel, nachdem Alice und Bob alle Instanzen, in denen sie verschiedene Basen gewählt hatten, verworfen haben)? Geben Sie das Ergebnis im Verhältnis zu der Gesamtzahl n der gesendeten Qubits an.

(ii) Was ist der Bruchteil an Fehlern im gesiebten Schlüssel, wenn ein „eavesdropper“ (Abhörer) Eve die Transmission durch eine „intercept-resend“ Strategie unterbricht? Bei einer „intercept-resend“ Strategie misst Eve jedes Qubit in einer zufälligen Basis und schickt anschließend den zum Messergebnis zugehörigen Eigenzustand weiter an Bob.

(iii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt Eve unbemerkt, wenn Alice insgesamt $n = 100$ Qubits zu Bob sendet?

3. Kommutator-Relationen und Baker-Campbell-Hausdorff Formell (1+2+3 Punkte)

Der Kommutator zweier Operatoren A und B ist wie folgt definiert:

$$[A, B] = AB - BA.$$

(i) Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $A,\ B$ und C die Produktregel

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \tag{1}$$

und die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \tag{2}$$

gelten.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben betrachten wir Operatoren A und B, welche die Kommutator-Relationen $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ erfüllen.

(ii) Zeigen Sie per Induktion, dass

$$[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B], \tag{3}$$

$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]. \tag{4}$$

(iii) Zeigen Sie, dass für die Operatoren A und B die einfache Baker-Campbell-Hausdorff-Formel gilt:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{5}$$

Tipp: Benutzen Sie (ii) um zu zeigen, dass die Funktion $f(t) = e^{tA}e^{tB}$ die Differentialgleichung $\frac{df}{dt} = (A + B + t[A, B])f$ erfüllt. Anschließend, lösen Sie die Differentialgleichung und verwenden die Eindeutigkeit der Lösung.