Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 4

Vorlesung: Otfried Gühne   Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:30-10:00 (B030) und Di. 12:30-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 10.11.2017

1. Zeitentwicklung und Unschärfe (1+1+1+1+1 Punkte)

Der Hamiltonian eines Zwei-Niveau-Systems (Qubits) sei wie folgt gegeben $H = \hbar\Omega|1\rangle\langle 1|$, mit einer Konstante Ω.

(i) Berechne die Energie-Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.
(ii) Berechne den Zeitentwicklungsoperator bezüglich des Hamiltonians H.
(iii) Der Anfangszustand des Systems sei durch $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ gegeben. Berechne $|\psi(t)\rangle$.
(iv) Berechne die Standardabweichung ΔE.
(v) Berechne die Größe $\Delta E \Delta t$, wobei mit Δt die vergangene Zeit gemeint ist bis sich der Zustand $|\psi(t)\rangle$ in einen vom Anfangszustand $|\psi(0)\rangle$ ununterscheidbaren Zustand entwickelt hat. Vergleiche das Ergebnis mit der Energie-Zeit-Unschärfe-Relation.

2. Zustandsunabhängige Unschärfe-Relation (2+2 Punkte)

Betrachte die Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z (siehe Aufg. 1, Übungsblatt 2), und einen beliebigen Zwei-Niveau-Zustand (Qubitzustand) $|\psi\rangle$.

(i) Zeigen Sie, dass $\langle\sigma_x\rangle_\psi^2 + \langle\sigma_y\rangle_\psi^2 + \langle\sigma_z\rangle_\psi^2 = 1$. Tipp: Finde eine passende Parametrisierung von $|\psi\rangle$.
(ii) Benutzen Sie (i) um zu zeigen, dass die Größe $\langle(\Delta\sigma_x)^2\rangle_\psi + \langle(\Delta\sigma_z)^2\rangle_\psi$ eine positive zustandsunabhängige untere Grenze hat (d.h. für alle $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$).

3. Heisenbergbild (1+2+3 Punkte)

Sei $U(t)$ ein unitärer Operator der die Zeitentwicklung eines Quantensystems beschreibt. Im Schrödingerbild befindet man sich wenn die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ betrachtet wird, wobei die Observablen als zeitunabhängig angenommen werden. Im Gegensatz hierzu, wird im Heisenbergbild die Zeitentwicklung den Observablen zugeschoben und die Zustände als zeitunabhängig betrachtet. Die Zeitentwicklung im Heisenbergbild ist wie folgt definiert:

$$|\psi\rangle = U(t)^\dagger|\psi(t)\rangle, \qquad A(t) = U(t)^\dagger A U(t). \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ wirklich zeitunabhängig ist.
(ii) Zeigen Sie, dass, für einen gegebenen Anfangszustand $|\psi(0)\rangle$, die möglichen Beobachtungen im Schrödinger- bzw. Heisenbergbildbeiden die selben sind. D.h. zeigen Sie, dass es egal ist in welchem Bild man die Erwartungswerte von gegebenen Observablen, zu einer gewissen Zeit t, berechnet.
(iii) Für das Schrödingerbild haben wir die Schrödinger-Gleichung. Leite eine ähnliche Gleichung für $A(t)$ her. Was passiert wenn A mit H kommutiert?
Tipp: $\partial_t U(t) = -iHe^{-itH} = -iHU(t)$ und $\partial_t U(t)^\dagger = iHe^{itH} = iHU(t)^\dagger$.