Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 3

Vorlesung: Otfried Gühne Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:30-10:00 (B030) und Di. 12:30-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 03.11.2017

1. Spin-1 (2+2+2 points)

Sei $\{z_-, z_0, z_+\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$. Wir nehmen an, dass diese Basis die Eigenbasis des Spin-1 Operators S_z darstellt.

(i) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren orthonormal sind:

$$\begin{aligned}\chi_+ &= \frac{1}{2}z_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}z_0 + \frac{1}{2}z_-,\\ \chi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}z_+ - \frac{1}{\sqrt{2}}z_-,\\ \chi_- &= \frac{1}{2}z_+ - \frac{1}{\sqrt{2}}z_0 + \frac{1}{2}z_-.\end{aligned}$$

(Dies ist die Eigenbasis des Spin-1-Operators S_x.)

(ii) Nennen Sie einen Zustand für den weder eine Messung der Observablen S_x noch S_z das Resultat Null ergibt.

(iii) Schreiben Sie die Eigenbasis von S_z als Superposition der S_x-Basisvektoren.

(iv) Zeigen Sie, dass $|\chi_+\rangle\langle\chi_+| + |\chi_0\rangle\langle\chi_0| + |\chi_-\rangle\langle\chi_-| = |z_+\rangle\langle z_+| + |z_0\rangle\langle z_0| + |z_-\rangle\langle z_-|$.

2. Entropie (2+2+2 Punkte)

Die Von Neumann Entropie einer positiven $n \times n$ Matrix ρ, mit Spur-1 ($\mathrm{tr}(\rho) = 1$), ist wie folgt definiert:

$$S(\rho) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln \lambda_i,$$

wobei λ_i die Eigenwerte von ρ bezeichnen. Beachten Sie, dass jede positive Matrix ρ in Spektralform $\rho = \sum_i \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ geschrieben werden kann, wobei $|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ die Projektionsoperatoren auf die jeweiligen, zu den Eigenwerten λ_i zugehörigen, Eigenräume bezeichnen. Des Weiteren sind die Eigenwerte nicht-negativ und für eine Spur-1 Matrix gilt $\sum_i \lambda_i = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Von Neumann Entropie einer positiven $n \times n$ Matrix, mit Spur-1, genau dann gleich Null ist wenn nur ein Eigenwert ungleich Null ist (also $\lambda_i = 1$ für genau ein i).

(ii) Die Entropie einer Messung kann auf ähnliche Weise definiert werden. Im Unterschied zur Von-Neumann Entropie werden hier jedoch die Messwahrscheinlichkeiten statt die Eigenwerte benutzt:

$$S(M, \eta) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i,$$

mit der gemessenen Observable $M = \sum_i m_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, dem Zustand η, und der Messwahrscheinlichkeit $p_i = |\langle\psi_i|\eta\rangle|^2$ für das Messergebnis i.

Berechne die Entropie der Messungen σ_x und σ_z in den Eigenzuständen σ_x, σ_y, und σ_z.

(iii) Kann die folgende Größe, für einen beliebigen Zustand η, Null werden?

$$S(\sigma_x, \eta) + S(\sigma_z, \eta)$$

(Ohne Beweis. Ein gutes Argument reicht.)

Ankündigung:
ZaPF in Siegen: 28.10.-1.11.17
Sei dabei!
Melde dich an unter: engel.zapf.in oder schreibe an helfen@siegen.zapf.in