Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 2

Vorlesung: Otfried Gühne   Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:00-10:00 (B030) und Di. 12:00-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 27.10.2017

1. Pauli-Matrizen (2+2+2+2 points)

Die Pauli-Matrizen sind wie folgt definiert:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen hermitesch sind und die folgenden Eigenschaften erfüllen: $\det(\sigma_i) = -1$, $\mathrm{tr}[\sigma_i] = 0$, und $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ für $i = x, y, z$.

(ii) Der Kommutator von zwei Matrizen A und B ist definiert als $[A, B] = AB - BA$. Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen folgende Kommutator-Relationen erfüllen: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$ für $i, j, k \in \{x, y, z\}$. Das Levi-Civita Symbol ε_{abc} ist hierbei definiert als $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$, und mit den restlichen Symbolen gleich 0.

(iii) Ein Anit-Kommutator zweier Matrizen A and B ist definiert als $\{A, B\} = AB + BA$. Zeigen Sie, dass $\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}I$, für $a, b \in \{x, y, z\}$, und mit dem Kronecker-Delta Symbol δ_{ab}.

(iv) Verifizieren Sie, dass die Pauli-Matrizen zusammen mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ eine Basis des Raums der komplexen 2×2 Matrizen bilden.

2. Die Bloch Vektor Darstellung (2+2+2 points)

Wir definieren für jeden Vektor $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ eine Matrix $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$. In Matrixdarstellung erhalten wir:

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, das jede hermitesche 2×2 Matrix wie folgt geschrieben werden kann:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12}^* & m_{22} \end{pmatrix},$$

mit $m_{11}, m_{22} \in \mathbb{R}$.

(ii) Benutze (i) um zu zeigen, dass jede hermitesche Matrix M wie folgt dargestellt werden kann:

$$M = \frac{1}{2}(aI + \lambda\vec{n} \cdot \vec{\sigma}),$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, und einem Einheitsvektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Desweiteren, benutze (ii) um zu zeigen, dass jede positive 2×2 Matrix M mit Spur 1 in der folgende Darstellung geschrieben werden kann:

$$M = \frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \tag{1}$$

mit $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ und $\|\vec{n}\| \leq 1$. Diese Beziehung zwischen positiven 2×2 Matrizen und einem Punkt der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ wird auch Bloch-Darstellung genannt. (Tipp: Letzte Woche haben wir gezeigt, dass die Positivität einer Matrix äquivalent zur Hermitizität mit positiven Eigenwerten ist. Berechne die Eigenwerte der Darstellung in (ii). Beachte auch, dass die Spur der Pauli-Matrizen verschwindet.

3. Wahrscheinlichkeiten von Messergebnissen (2+2+2+2)

In der zweiten Aufgabe auf dem letzten Übungsblatt haben Sie die Zeitentwicklung eines Eigenzustands von σ_z bezüglich des Hamiltonian σ_x gelöst.

(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Energie das Resultat ± 1 zu erhalten, wenn das System in einem Eigenzustand von σ_x, σ_y, und σ_z ist. Wie ist die Wahrscheinlichkeit wenn das System im Zustand $\vec{a}(t)$ ist? Tipp: Berechne zuerst die Eigenvektoren der Pauli-Matrizen und dann verwende das Skalarprodukt (siehe Vorlesung).

(ii) Finde die Bloch Darstellung von $|\vec{a}(t)\rangle\langle\vec{a}(t)|$. Tipp: Der "ketbra" $|\cdot\rangle\langle\cdot|$ zweier Vektoren ψ und φ in $\mathbb{C}^2$ ist wie folgt definiert:

$$|\psi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} \psi_1^*\varphi_1 & \psi_1^*\varphi_2 \\ \psi_2^*\varphi_1 & \psi_2^*\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Beschreibe die Zeitentwicklung des Bloch Vektors?

(iv) Benutze die Bloch Darstellung (siehe Gleichung (1) in Aufgabe 2,(iii)) und berechne $\mathrm{tr}[|\psi_{x\pm}\rangle\langle\psi_{x\pm}|M]$, wobei $\psi_{x\pm}$ die Eigenvektoren von σ_x bezüglich der Eigenwerte ± 1 sind. Setzte die Vektoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, und den Bloch Vektor bezglich $\vec{a}(t)$, ein. Erkennen Sie Gemeinsamkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten in (i)?

Ankündigung:
ZaPF in Siegen: 28.10.-1.11.17
Sei dabei!
Melde dich an unter: engel.zapf.in oder schreibe an helfen@siegen.zapf.in