Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 12

Vorlesung: Otfried Gühne Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:30-10:00 (B030) und Di. 12:30-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 19.01.2018

1. **Energieverschiebung durch Gravitation (4 Punkte)**
   Bei der Berechnung der Energieniveaus des Wasserstoffatoms wird vernachlässigt dass das Elektron und das Protons auch gravitativ wechselwirken. Berechnen Sie die erste Korrektur der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms unter Berücksichtigung dieser Gravitationswechselwirkung. Der Störoperator ist dabei durch das Gravitationspotential $V = -G\frac{mM}{r}$ der Erde gegeben gegeben, wobei G die Gravitationskonstante, m die Masse des Elektrons und M die Masse des Protons bezeichnen. Wie groß ist das Verhältnis zwischen der ungestörten Grundzustandsenergie und der ersten Energiekorrektur?

2. **Grundzustandsenergie des Heliumatoms (6 Punkte)**
   Die Grundzustandsenergie des Heliumatoms kann mit Hilfe der Störungstheorie näherungsweise bestimmt werden. Dazu setzen wir, unter der Annahme eines unendlich schweren Atomkerns und bei Vernachlässigung des Elektronspins, folgenden Hamiltonoperator an:
   $$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2e^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \tag{1}$$
   und behandeln die Elektron-Elektron Wechselwirkung ($V = \frac{e^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$) als Störung des freien Hamiltonians $H_0 = H - V$.
   (i) Wie lautet die Grundzustandsenergie des freien Hamiltonoperators H_0 ?
   (ii) Berechnen Sie die erste Energiekorrektur des Grundzustands. (Tipp: Verwenden Sie Kugelkoordinaten und die Formel $\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta_1,\phi_1)Y_{lm}(\theta_2,\phi_2)$, wobei r_i, θ_i und ϕ_i die Kugelkoordinaten bezeichnen und $r_< = \min(r_1, r_2)$, bzw. $r_> = \max(r_1, r_2)$.).

3. **Wasserstoffatom im homogenen elektrischen Feld (6 Punkte)**
   Ein Wasserstoffatom im Grundzustand ($|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$) befindet sich in einem homogenen elektrischen Feld welches in z-Richtung zeigt. Der Störoperator ist dann durch $V = -e|\vec{E}|z$ gegeben.
   (i) Berechnen Sie die erste Energiekorrektur $E^{(1)}$.
   (ii) Begründen Sie, dass sich für die zweite Energiekorrektur folgender Ausdruck ergibt:
   $$E^{(2)} = e^2|\vec{E}^2| \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} \frac{|\langle n,l,m|z|1,0,0\rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}}. \tag{2}$$
   (iii) Benutzen Sie nun, dass
   $$z|1,0,0\rangle = \frac{i\mu}{\hbar^2}[H,Z]|1,0,0\rangle, \tag{3}$$
   mit dem ungestörten Hamiltonian H und einem Operator Z, dessen Wirkung auf den Grundzustand durch $Z|1,0,0\rangle = -iza(a + \frac{r}{2})|1,0,0\rangle$ (a = Bohrscher Radius) gegeben ist, und zeigen Sie:
   $$E^{(2)} = -\frac{i|\vec{E}|^2}{a}|\langle 1,0,0|zZ|1,0,0\rangle|^2. \tag{4}$$
   (iv) Werten Sie $E^{(2)}$ explizit aus.