Theoretische Physik: Quantenmechanik
Übungsblatt 1

Vorlesung: Otfried Gühne   Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:00-10:00 (B030) und Di. 12:00-14:00 (B030)

Zu bearbeiten bis 20.10.2017

1. Unitäre Matrizen (2+2+2 Punkte)

Eine unitäre Matrix erfüllt die Bedingung $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$ wobei $\mathbb{1}$ den Identitätsoperator bezeichnet.
(a) Zeige, dass ein unitärer Operator das Skalarprodukt invariant lässt. Schließe daraus dass ein unitärer Operator eine Isometrie (eine normerhaltende Abbildung) ist und er orthonormale Basen immer auf orthonormale Basen abbildet.
(b) Diagonalisiere die folgende Matrix und zeige, dass die entsprechende Matrixtransformation durch eine unitäre Matrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & i/4 \\ -i/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Verifiziere dass die obige Matrix positiv ist und berechne ihre Quadratwurzel.

2. Matrix Exponentialfunktion (3+3 Punkte)

Die Exponentialfunktion einer Matrix A is durch die Potenzreihe $e^A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ definiert. Die Pauli Spin Matrix in x-Richtung lautet

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $e^{\frac{-it}{\hbar}\sigma_x}$ (Tipp: Berechne einige Terme der Potenzreihe und vergleiche das Ergebnis mit der Taylorreihe von Sinus und Kosinus.
(b) Löse die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \vec{a}(t)}{\partial t} = \sigma_x \vec{a}(t)$$

mit der Anfangsbedingung $\vec{a}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Beachte: $\frac{\partial e^{\frac{-it}{\hbar}\sigma_x}}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}\sigma_x e^{\frac{-it}{\hbar}\sigma_x}$ wobei die Ableitung komponentenweise zu verstehen ist.

3. Matrixidentitäten (5 Punkte)

Zwei $n \times n$ Matrizen A and B sind identisch, i.e. $A = B$, wenn $A\vec{c} = B\vec{c}\ \forall \vec{c} \in \mathbb{C}^n$. Zeige, dass die folgenden drei Bedingungen equivalent sind:
a) $A = B$
b) $< \vec{a}, A\vec{a} >=< \vec{a}, B\vec{a} >\ \ \forall \vec{a} \in \mathbb{C}^n$
c) $< \vec{a}, A\vec{b} >=< \vec{a}, B\vec{b} >\ \ \forall\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$.
Tipp: Für die Richtung b) nach c) kann die sogenannte Polarisationsidentität hilfreich sein:

$$< \vec{a}, A\vec{b} >= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k < \vec{a} + i^k\vec{b}, A(\vec{a} + i^k\vec{b}) >\ \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n.$$

Für die Richtung c) nach a) beachte dass $\|\vec{a} - \vec{b}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$, für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$.