Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung
Übungsblatt 9

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)
Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 17.01.2017

P15. **Kalte Atome**

Um ein Bose Einstein Kondensat zu erzeugen, wird eine Wolke ^{87}Rb Atome gefangen. Diese wird gekühlt. Ab einer bestimmten Temperatur und Dichte kondensieren die Atome. Um ein solches Bose Einstein Kondensat zur erzeugen, ist es also wichtig die Temperatur der Atomwolke zu kennen. Dazu werden sog. *Time of Flight* Messungen durchgeführt. Dafür wird erst die Falle ausgeschaltet. Dann expandiert die Atomwolke auf Grund ihrer Temperatur. Mit einer Kamera wird die Wolke für verschiedene Expansionzeiten aufgenommen und dessen Größe ausgewertet. Aus diesen Messungen kann man schließlich auf die Temperatur der Atome zurückschließen.

Wir betrachten das Problem in einer Dimension und nehmen eine Gaußförmige Anfangsverteilung mit Varianz σ_0 im Raum an. Weiter nehmen wir an, dass es sich hier um ein ideales Gas mit Temperatur T und Atommasse m handelt. Dies bedeutet, dass die kinetische Energie Boltzmann verteilt ist.

Wie ändert sich die Größe der Atomwolke mit der Zeit $\sigma^2(t)$?

P16. **Viel Verkehr**

Wir betrachten den Verkehr auf einer Straße. Mit $\varrho(x,t)$ bezeichnen wir die Anzahl der Fahrzeuge pro Längeneinheit am Ort x und zur Zeit t, also die Fahrzeugdichte. Mit $q(x,t)$ bezeichnen wir die Anzahl der Fahrzeuge pro Zeiteinheit, die den Ort x zum Zeitpunkt t passieren.

(a) Zeigen Sie die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\varrho(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}q(x,t) = 0,$$

für $t > 0$.

(b) Die Geschwindigkeit der Fahrzeuge am Ort x und zum Zeitpunkt t modellieren wir als

$$v(x,t) = c\left(1 - \frac{\varrho(x,t)}{\varrho_0}\right)$$

wobei c die Maximalgeschwindigkeit ist und ϱ_0 die maximale Fahrzeugdichte bezeichnet, bei der der Verkehr zum Erliegen kommt. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = v(x,t) - c\frac{\varrho(x,t)}{\varrho_0}$$

eine Lösung der *Burger-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0$$

ist.