

Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung

Übungsblatt 7

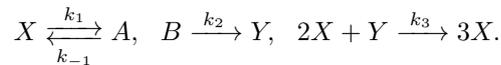
Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)

Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 20.12.2016

P12. Das Schnackenberg Modell

Schnackenberg (1979) cf das folgende hypothetische Modell für die Beschreibung eines chemischen Oszillators:



Schnackenberg verwendete die Massenerhaltung um auf die folgenden entdimensionalisierten Gleichungen des Systems zu kommen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - x + x^2y \\ \dot{y} &= b - x^2y,\end{aligned}$$

wobei $a, b > 0$ Parameter und $x, y > 0$ dimensionslose Konzentrationen sind.

(a) Zeigen Sie, dass alle Trajektorien eventuell in eine bestimmte Fang-Region kommen. Machen Sie die Fang-Region so klein wie möglich.

Hinweis: Untersuchen Sie das Verhältnis \dot{y}/\dot{x} für große x .

(b) Zeigen Sie, dass das System einen einzigen Fixpunkt besitzt. Klassifizieren Sie diesen.

(c) Zeigen Sie, dass eine Hopf-Bifurkation für $b - a = (a + b)^3$ auftritt.

P13. Das Collatz-Problem

Wir nehmen die Abbildung

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & \text{falls } x_n \text{ gerade,} \\ 3x_n + 1, & \text{falls } x_n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei x_n eine ganze Zahl ist. Für den Startwert $x_1 = 6$ ergibt sich die Folge $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ usw.

Zeigen Sie, dass für jeden Startwert x_1 die Folge in den Zyklus $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ übergeht.

Frohe Weihnachten!