Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung
Übungsblatt 7

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)
Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 20.12.2016

P12. **Das Schnackenberg Modell**
Schnackenberg (1979) cf das folgende hypothetische Modell für die Beschreibung eines chemischen Oszillators:

$$X \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} A, \quad B \xrightarrow{k_2} Y, \quad 2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X.$$

Schnackenberg verwendete die Massenerhaltung um auf die folgenden entdimensionalisierten Gleichungen des Systems zu kommen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - x + x^2 y \\ \dot{y} &= b - x^2 y, \end{aligned}$$

wobei $a, b > 0$ Parameter und $x, y > 0$ dimensionslose Konzentrationen sind.

(a) Zeigen Sie, dass alle Trajektorien eventuell in eine bestimme Fang-Region kommen. Machen Sie die Fang-Region so klein wie möglich.
Hinweis: Untersuchen Sie das Verhältnis $\dot{y}/\dot{x}$ für große x.

(b) Zeigen Sie, dass das System einen einzigen Fixpunkt besitzt. Klassifizieren Sie diesen.

(c) Zeigen Sie, dass eine Hopf-Bifurkation für $b - a = (a + b)^3$ auftritt.

P13. **Das Collatz-Problem**
Wir nehmen die Abbildung

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & \text{falls } x_n \text{ gerade,} \\ 3x_n + 1, & \text{falls } x_n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei x_n eine ganze Zahl ist. Für den Startwert $x_1 = 6$ ergibt sich die Folge $6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4$ usw.
Zeigen Sie, dass für jeden Startwert x_1 die Folge in den Zyklus $4 \to 2 \to 1 \to 4$ übergeht.

Frohe Weihnachten!