

Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung

Übungsblatt 6

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)

Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 13.12.2016

P10. Das Rikitake Modell für geomagnetische Umkehrungen

Wir nehmen das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -vx + zy \\ \dot{y} &= -vy + (z - a)x \\ \dot{z} &= 1 - xy\end{aligned}$$

wobei $a, v > 0$ Parameter sind. x und y beschreiben die elektrischen Ströme und z die Winkelgeschwindigkeit. Diese Gleichung wurden von Rikitake (1858) vorgeschlagen um die Eigenbildung vom Erdmagnetfeld durch große Wirbelströme im Erdkern zu beschreiben. Von Computer Simulationen weiß man, dass das System für bestimmte Werte der Parameter chaotische Lösungen hat. Diese beschreiben die geostationären Daten weitestgehend.

- Zeigen Sie, dass das System dissipativ ist.
- Zeigen Sie, dass die Fixpunkte in parametrischer Form $x^* = \pm k$, $y^* = \pm k^{-1}$, $z^* = vk^2$ mit $v(k^2 - k^{-2}) = a$ geschrieben werden können.
- Klassifizieren Sie die Fixpunkte.

P11. Zelt-Abbildung als Modell für eine Lorenz-Abbildung

Wir nehmen die Abbildung

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x_n, & \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

als eine einfaches analytisches Modell einer Lorenz-Abbildung.

- Warum heißt diese Abbildung „Zelt-Abbildung“?
- Finden Sie alle Fixpunkte des Systems und klassifizieren Sie diese.
- Zeigen Sie, dass die Abbildung einen Zyklus mit Periode 2 hat. Ist dieser stabil?
- Können Sie einen Zyklus mit Periode 3 finden? Einen mit Periode 4? Wenn ja, sind diese stabil oder instabil?