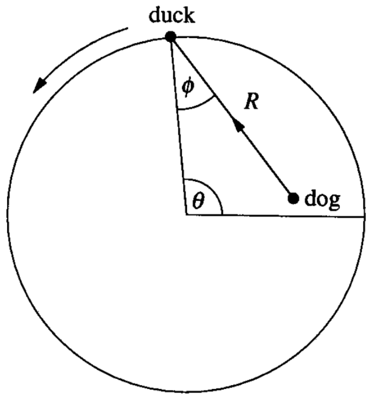
# Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung
# Übungsblatt 5

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)
Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 06.12.2016

P8. **Kreisförmiges Verfolgungsproblem**
Ein Hund befindet sich in einem kreisförmigen Weiher und sieht eine Ente am Rand schwimmen. Der Hund verfolgt die Ente indem er immer direkt in ihre Richtung schwimmt. In anderen Worten, zeigt sein Geschwindigkeitsvektor immer zur Ente. Derweil versucht die Ente auszuweichen, indem sie den Teich so schnell sie kann umrundet. Dies tut sie entgegen dem Uhrzeigersinn.




(a) Wir nehmen an, dass der Weiher einen Einheitskreis bildet und beide Tiere mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit schwimmen. Leiten Sie die Differentialgleichungen für beide her. *Hinweis:* Verwenden Sie die die in der Abbildung dargestellten Koordinaten. Wechseln Sie in ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Ort des Hundes ist. Finden Sie dann Gleichungen für $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta$ und $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$.

(b) Nehmen Sie nun an, dass der Hund $k$ mal so schnell schwimmt wie die Ente. Leiten Sie die Differentialgleichung für die Bahn des Hundes her.

(c) Wenn $k = 1/2$ ist, was wird der Hund am Ende (also langfristig) machen?

*Anmerkung:* Dieses Problem hat eine lange interessante Geschichte und datiert bis mindestens 1800 zurück. Es ist wesentlich komplizierter als ähnliche *Umkreisungs-Probleme* – Es ist keine Lösung für den Weg des Hundes in Teilaufgabe (a) bekannt, welche nur mit grundlegenden mathematischen Funktionen auskommt. Siehe Davis (1962, Seiten 113-125) für eine nette Analyse des Problems.

P9. **Der Brüsselator**
Der Brüsselator ist eine einfaches Modell für einen hypothetischen chemischen Oszillator, benannt nach der Heimatstadt des Wissenschaftlers, der es vorstellte. (Das ist ein üblicher Scherz in der Gesellschaft der chemischen Oszillatoren. Es gibt auch den „Oregonator“, „Palo Altonator“,...) In dimensionsloser Form ist seine Dynamik gegeben durch

$$\dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y,$$
$$\dot{y} = bx - ax^2y,$$

dabei sind $a, b > 0$ Parameter und $x, y \geq 0$ dimensionslose Konzentrationen.

(a) Finden und klassifizieren Sie alle Fixpunkte des Systems.

(b) Finden Sie die Fixpunkte des Systems graphisch. Zeichnen Sie mögliche Fanggebiete ein.

(c) Zeigen Sie dass für einen Bestimmten Parameter $b = b_c$ eine Hopf-Bifurkation auftritt. Bestimmen Sie $b_c$.

(d) Existiert der Grenzzyklus für $b > b_c$ oder $b < b_c$? Begründen Sie mit dem Poincaré-Bendixson Theorem.

(e) Finden sie die ungefähre Periodendauer des Grenzzyklus für $b \approx b_c$.