Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung
Übungsblatt 4

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)
Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 29.11.2016

P7. **Ein einfaches Model für einen Magneten**
Ein Magnet kann beschrieben werden durch eine enorme Anzahl an Elektronen-Spins. Im einfachsten Model, bekannt als das **Ising Model**, zeigen die Spins nur nach Oben oder Unten. Sie tragen die Werte $S_i = \pm 1$, wobei $i = 1 \cdots N >> 1$. Aus Quanten-mechanischen Gründen, neigen die Spins dazu in die gleiche Richtung zu zeigen, wie ihre Nachbarn. Auf der anderen Seite werden sie durch Temperaturschwankungen beeinflusst, dies führt zu einen zufälligen Wechsel der Ausrichtung.

Eine wichtige makroskopische Größe des Magnetes ist der mittlere Spin oder die *Magnetisierung*

$$m = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S_i \right|.$$

Bei hohen Temperaturen zeigen die Spins in zufällige Richtungen, so dass $m = 0$ und das Material ist in einem *paramagnetischen* Zustand. Wird die Temperatur gesenkt, bleibt die Magnetisierung m zunächst nahe Null. Ab einer kritischen Temperatur T_c fängt das Material plötzlich an zu magnetisieren. Nun ist $m > 0$ und wir haben einen *Ferromagneten.*

Allerdings gibt es, wegen der Symmetrie zwischen nach Oben und nach Unten orientierten Spins, *zwei* mögliche Ferromagneten. Diese Symmetrie kann gebrochen werden. Dazu wird ein externes magnetisches Feld h angelegt, welches einer der beiden Richtungen bevorzugt. Dann wird in diesem Model (genannt *Molekularfeldtheorie*) der Wert von m im Gleichgewicht beschrieben durch

$$h = T \tanh^{-1} m - Jnm.$$

Hier sind J und n Konstanten. Dabei ist $J > 0$ die ferromagnetische Kopplungsstärke und n die Anzahl an Nachbarn jedes Spins.

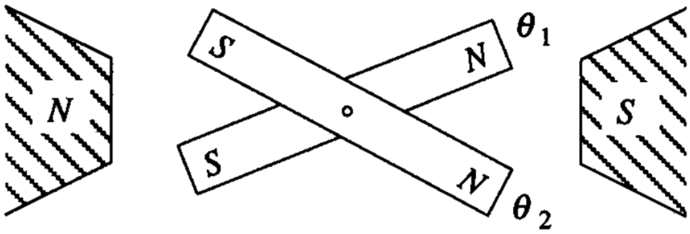
(a) Analysieren Sie graphisch die Lösungen $\tilde{m}$ der Gleichung.

(b) Für den speziellen Fall, dass $h = 0$: Finden Sie die kritische Temperatur T_c, bei der ein Phasenübergang statt findet.

P8. **Wechselwirkende Stabmagnete**
Wir nehmen das System

$$\dot{\theta}_1 = K \sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin\theta_1,$$
$$\dot{\theta}_2 = K \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin\theta_2,$$

wobei $K \geq 0$. Als grobe physikalische Interpretation, stellen Sie sich vor, dass zwei Stabmagnete an einem Tisch befestigt sind. Sie sind so befestigt, dass sie um die Befestigung rotieren können, wie im Bild gezeigt. Die Winkel θ_1 und θ_2 sind die Winkel der Nordpole der beiden Stabmagneten. Der Term $K \sin(\theta_2 - \theta_1)$ beschreibt die abstoßende Kraft der beiden Stabmagnete, durch welche die beiden Nordpole einen 180° Winkel zueinander versuchen einzunehmen. Dieser Abstoßung wirkt der Term $\sin\theta$ entgegen. Dieser Term wird durch zusätzliche Magnete erzeugt, die versuchen die Nordpole der Stabmagneten in Richtung Osten zu ziehen. Wird die Trägheit der beiden Stabmagnete vernachlässigt und ist zusätzlich keine Dämpfung vorhanden, so beschreiben die oberen Gleichungen die Stabmagnete in guter Näherung.



(a) Finden und klassifizieren Sie alle Fixpunkte des Systems.

(b) Zeigen Sie, dass für $K = \frac{1}{2}$ eine Bifurikation auftritt. Klassifizieren Sie diese.
Hinweis: $\sin(a - b) = \cos b \sin a - \sin b \cos a$

(c) Zeigen Sie, dass das System ein Gradienten-System ist, im Sinne von $\dot{\theta}_i = -\partial V / \partial \theta_i$ für ein zu bestimmendes Potential $V(\theta_1, \theta_2)$.

(d) Verwenden Sie (c) um zu zeigen, dass das System keine periodischen Umlaufbahnen hat.

(e) Skizzieren Sie das Phasenbild für $0 < K < \frac{1}{2}$ und für $K > 1/2$.