Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung
Übungsblatt 11

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)
Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 31.01.2017

P18. **Der Brüsselator mit Diffusion**

Der Brüsselator ist eine einfaches Modell für einen hypothetischen chemischen Oszillator. Mit Diffusion $D_1, D_2 \geq 0$ ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen für die dimensionslosen Konzentrationen u und v die in einem eindimensionalen System der Länge L wechselwirken:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A - (B+1)u + u^2 v, \;\; x \in [0, L], \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Bu - u^2 v, \;\; A > 0, \;\; B > 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \;\text{ fuer }\; x = 0 \;\text{ und }\; x = L.
\end{aligned}$$

(a) In Übung 5 haben Sie bereits den Fixpunkt u_0 und v_0 des Brüsselators ohne Diffusion untersucht. Vergewissern Sie sich, dass dieser stabil ist und geben Sie mögliche Kriterien dafür an.

Kann durch die Diffusion die homogene Lösung aus Aufgabe (a) destabilisiert werden und eine räumlich dissipative Struktur enstehen?

(b) Setzen Sie den Ansatz $u(t, x) = u_0(x) + \delta u(x, t)$ und $v(t, x) = v_0(x) + \delta v(x, t)$ an und linearisieren sie das Gleichungssystem für δu und δv.

(c) Nehmen Sie nun den ganz allgemeinen Ansatz $\delta u(x, t) = \sum_k c_k \phi_k(x) \exp(\lambda_k t)$ und $\delta v(x, t) = \sum_k d_k \psi_k(x) \exp(\lambda_k t)$. Verwenden Sie die Randwertbedingungen um diesen Ansatz zu vereinfachen.

(d) Setzen Sie nun Ihren Ansatz für $\delta u(x, t)$ und $\delta v(x, t)$ in das linearisierte Gleichungssystem aus (b) ein. Welches Gleichungssystem müssen die Koeffizienten c_k und d_k erfüllen? Welche Bedingung müssen die λ_k erfüllen, damit das system instabil wird? Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass eine der Moden (und somit das System) ab einem bestimmten Wert von B, nämlich B_c, instabil wird.