Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung
Übungsblatt 10

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)
Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 24.01.2017

P17. **Das Gierer-Meinhardt-Modell**

Das Modell von Gierer und Meinhardt (1974) geht davon aus, dass ein Aktivator (Anregungsstoff) X und ein Inhibitor (Hemmstoff) Y (mit den dimansionlosen Konzentrationen u und v) in einem eindimensionalen System der Länge L wechselwirken:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a + \frac{u^2}{v} - bu, \quad x \in [0, L], \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u^2 - v, \quad a > 0, \quad b > 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ fuer } x = 0 \text{ und } x = L.
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen drücken aus, dass das System stofflich geschlossen ist. Der Aktivator wird mit konstanter Rate $\propto a$ erzeugt, sein autokatalytisches (sich selbst verstärkend) Wachstum wird vom Inhibitor gebremst $\propto u^2/v$, und er zerfällt mit linearer Rate. Der Inhibitor wird vom Aktivator nach einem quadratischen Gesetz $\propto u^2$ erzeugt und zerfällt ebenfalls.

Zeigen Sie (unter der Annahme, dass das System ohne Diffusion einen stabilen Fixpunkt besitzt), dass es eine kritische Länge L_c gibt, bei deren Überschreiten die homogene Lösung instabil wird, indem die Mode mit $k = 1$ anwächst (so dass als neue stabile Lösung eine „gerichtete“ Raumstruktur ensteht)!