

Nicht-lineare Dynamik und Strukturbildung

Übungsblatt 1

Vorlesung: Otfried Gühne, Di. 10-12 (D222)

Übung: Sanah Altenburg, Di. 16-18 (D120)

Zu bearbeiten am 08.11.2016

P1. Der Allee Effekt

Für bestimmte Arten von Organismen ist die effektive Zuwachsrates \dot{N}/N für mittlere N am höchsten. Dieser Effekt heißt Allee Effekt (Edelstein-Keshet 1988). Wenn N zum Beispiel sehr klein ist, wird es schwierig eine*n Partner*in zu finden. Wenn N hingegen sehr groß ist, gibt es viel zu viel Konkurrenz um Nahrung und andere Ressourcen.

- Unter welchen Bedingungen ist die Gleichung $\dot{N}/N = r - a(N - b)^2$ ein geeignetes Beispiel für den Allee Effekt?
- Bestimmen Sie alle Fixpunkte des Systems und charakterisieren Sie diese.
- Skizzieren Sie die Lösungen für $N(t)$ für verschiedene Anfangsbedingungen.
- Vergleichen Sie die Lösungen für $N(t)$ mit denen der Logistikkgleichung aus der Vorlesung. Gibt es Unterschiede? Wenn ja, welche?

P2. Der undichte Eimer

Das folgende Beispiel zeigt, dass in manchen physikalischen Situationen, Uneindeutigkeit natürlich auftaucht und keine krankhafte Erscheinung ist.

Denken Sie an einen Eimer mit einem Loch im Boden. Wenn Sie den leeren Eimer in einer Pfütze stehen sehen, können Sie dann den Zeitpunkt bestimmen, zu dem der Eimer voll war? Nein, natürlich nicht! Der Eimer könnte schon vor einer Minute leer gewesen sein. Er könnte vielleicht auch schon vor 10 Minuten leer gewesen sein, oder so. Wenn Sie also rückwärts in der Zeit integrieren, müsste die Lösung der entsprechenden DGL uneindeutig sein.

Hier ist ein grobes Modell der Situation. Die Höhe des noch im Eimer stehenden Wassers zum Zeitpunkt t ist $h(t)$, a ist die Fläche des Loches, A ist die Querschnittsfläche des Eimers und $v(t)$ die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch das Loch austritt.

- Zeigen Sie, dass $av(t) = A\dot{h}(t)$. Welches physikalische Gesetz wird dazu verwendet?
- Verwenden Sie die Energieerhaltung, um eine zusätzliche Gleichung zu erhalten. Bestimmen Sie dazu zunächst die Änderung der potentiellen Energie im System, wenn sich der Wasserpegel um den Betrag Δh verringert. Dabei ist die Wasserdichte ρ . Bestimmen Sie dann die, durch den Abfluss des Wassers, aus dem Eimer deportierte kinetische Energie. Nehmen Sie schließlich an, dass die komplette potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wurde um $v^2 = 2gh$ zu erhalten.
- Verwenden Sie (a) und (b) um zu zeigen, dass $\dot{h} = -C\sqrt{h}$ gilt mit $C = \sqrt{2g}(a/A)$.
- Wir wählen $h(0) = 0$ (Der Eimer ist leer zum Zeitpunkt $t = 0$). Zeigen Sie, dass die Lösung für $h(t)$ uneindeutig ist für $t < 0$.