Theoretische Physik: Mechanik
Übungsblatt 12

Vorlesung: Otfried Gühne
Übungen: Sanah Altenburg, Tristan Kraft, Jannik Hoffmann
Vorlesung: Di. 10:15-11:45 (D308) und Fr. 10:15-11:45 (D308)
Übungen: Fr. 8:30-10 (B030) und Fr. 12-13:30 (B030)

Zu bearbeiten bis 26.01.2016

H30. **Rotierendes Plättchen** (7 Punkte)
Wir betrachten ein rechteckiges dünnes Plättchen mit Kantenlängen a, b und homogener Massenverteilung. Wählen Sie ein Koordinatensystem, dessen Ursprung sich im Schwerpunkt des Plättchens befindet.

(a) Drücken Sie die Massendichte $\varrho(x, y, z)$ des Plättchens mit Hilfe von δ- und Stufenfunktionen aus.

(b) Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts und bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente.
Hinweis: Sie können ihre Resultate anhand der Hauptträgheitsmomente eines Quaders überprüfen.

(c) Stellen Sie ausgehend vom Drehimpulssatz

$$\frac{\mathrm{d}'\vec{L}'}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{N}', \quad \vec{L}' = (A\omega_\xi, B\omega_\eta, C\omega_\zeta)$$

im körperfesten Bezugssystem die Bewegungsgleichungen (die sog. Eulerschen Kreiselgleichungen) auf. A, B und C bezeichnen hierbei die Hauptträgheitsmomente.

(d) Berechnen Sie das Drehmoment $\vec{N}'$, das notwendig ist, um das das Plättchen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Flächendiagonale zu rotieren. Was ergibt sich für ein quadratisches Plättchen ($a = b$)?

H31. **Pulsierender Stern** (8 Punkte)
Die Oberfläche eines veränderlichen Sterns (eines sog. Cepheiden) pulsiere mit der Frequenz ω. In einem einfachen Modell kann dieser Stern als homogenes rotierendes Ellipsoid mit zeitlich veränderlichen Hauptträgheitsmomenten

$$A = B = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)(1 - \frac{\epsilon}{2}\sin\omega t), \quad C = \frac{2}{5}Ma^2(1 + \epsilon\sin\omega t)$$

beschrieben werden, wobei für die Halbachsen $a > b$ gelte, $\epsilon \ll 1$, und die Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$ erfolge.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Kreiselgleichungen (vgl. Aufgabe H30), dass die ζ- Komponente von $\vec{\Omega}(t)$ näherungsweise erhalten bleibt.

(b) Zeigen Sie allgemein, dass $\vec{\Omega}(t)$ für $\omega \ll \Omega_\zeta$ eine Präzession um die ζ-Achse mit der Frequenz

$$\omega_P = \frac{C - A}{A}\Omega_\zeta \tag{1}$$

ausführt.
Hinweis: Für $\omega \ll \Omega_\zeta$ können die Zeitableitungen der Trägheitsmomente sowie $\dot{\Omega}_\zeta$ vernachlässigt werden.

(c) Setzen Sie nun A, C und Ω_ζ in Gl. (1) ein, und entwickeln Sie ω_P bis zur linearen Ordnung in ϵ. Wodurch werden die Beiträge nullter bzw. erster Ordnung in ϵ zur Präzessionsfrequenz verursacht? Was ergäbe sich für $a = b = R$?

(d) Berechnen Sie den Trägheitstensor des homogenen Rotationsellipsoids.

H32. **Die Drehgruppe** $SO(3)$ (5 Punkte)
Drehungen im $\mathbb{R}^3$ können durch spezielle orthogonale Matrizen dargestellt werden (vgl. Aufgabe H28. Trägheitstensor einer Raumstation), für die

$$\det D = 1, \quad D^T = D^{-1}$$

gilt. Zeigen Sie damit, dass die speziellen orthogonalen Matrizen eine mathematische Gruppe darstellen, d.h. folgende Eigenschaften besitzen:

1. Für $D, \tilde{D} \in SO(3)$ folgt $D\tilde{D} \in SO(3)$, d.h. das Produkt zweier Drehmatrizen ist wieder eine Drehmatrix.
2. Es existiert ein neutrales Element $E \in SO(3)$ mit $ED = DE = D$.
3. Für D existiert ein inverses Element D^{-1} mit $D^{-1}D = DD^{-1} = E$.

Wir wollen schließlich noch kurz die Eigenschaften derjenigen orthogonalen Matrizen betrachten, für die nicht $\det O = 1$ gilt.

4. Zeigen Sie, dass für reelle orthogonale Matrizen nur $\det O = \pm 1$ gelten kann.

Neben den Drehmatrizen gibt es also nur noch orthogonale Matrizen mit $\det O = -1$. Diese Matrizen beschreiben Drehspiegelungen.

5. Zeigen Sie, dass Drehspiegelungen keine Gruppe bilden.

Hinweis: $\det AB = \det A \det B$, $\det A^{-1} = 1/\det A$, $\det A^T = \det A$