Theoretische Physik: Mechanik
Übungsblatt 10

Vorlesung: Otfried Gühne
Übungen: Sanah Altenburg, Tristan Kraft, Jannik Hoffmann
Vorlesung: Di. 10:15-11:45 (D308) und Fr. 10:15-11:45 (D308)
Übungen: Fr. 8:30-10 (B030) und Fr. 12-13:30 (B030)

Zu bearbeiten bis 12.01.2015

H24. **Hamilton nach Wunsch** (5 Punkte)
Die kinetische Energie eines eindimensionalen harmonischen Oszillators ist durch $T = \frac{1}{2}m\dot{x}$, seine potentielle Energie durch $V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x})$, den zu x konjugierten Impuls p und die Hamilton-Funktion $H(p, x)$. Wie lauten die kanonischen Bewegungsgleichungen für den eindimensionalen harmonischen Oszillator?

(b) Wie sehen die Phasenkurven des harmonischen Oszillators (d.h. die Bahnen konstanter Energie) im Phasenraum $\{x, p\}$ aus?

(c) Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = const.$$

zur Berechnung von $x(t)$. Die unabhängigen Parameter sollen dabei die Gesamtenergie E und die Zeit t_0 sein, zu der der Oszillator seinen Maximalausschlag x_{max} erreicht. Wie hängen die Umkehrpunkte x_{max} von der Energie ab?

H25. **Poisson-Klammern** (2 Punkte)
Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

H26. **Kanonische Transformation** (7 Punkte)
Wir betrachten die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2q^2} + \tfrac{1}{2}p^2 q^4.$$

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für q auf.

(b) Finden Sie eine kanonische Transformation, welche H auf die Form eines harmonischen Oszillators bringt.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösungen der transformierten Koordinaten eine Lösung zu (a) sind.

H27. **Hamilton-Jacobi** (6 Punkte)
Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H = [p^2 + m^2\omega^2 q^2]/2m.$$

(a) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf und berechnen Sie formal $S(q)$ (das Integral müssen Sie nicht durchführen).

(b) Verwenden Sie nun $\partial S/\partial E = \beta = \text{const}$, um mittels Integration und Auflösen nach q den bekannten Ausdruck für $q(t)$ zu erhalten. Interpretieren Sie β.

(c) Bestimmen Sie aus S nun $p(q)$ und damit $p(t)$.