Theoretische Physik: Mechanik
Übungsblatt 1

Vorlesung: Otfried Gühne
Übungen: Sanah Altenburg, Tristan Kraft, Jannik Hoffmann
Vorlesung: Di. 10-12 (D308) und Fr. 10-12 (D308)
Übungen: Fr. 8:30-10 (B030) und Fr. 12:30-14 (B030)

Zu bearbeiten am 30.10.2015

P1. Elliptische Koordinaten

Ein elliptisches Koordinatensystem sei definiert durch

$$\begin{aligned} x &= l\,\mathrm{sinh}u\,\sin\theta\,\cos\varphi, \quad l,u = \text{const.}, \quad l,u > 0, \\ y &= l\,\mathrm{sinh}u\,\sin\theta\,\sin\varphi, \quad \theta \in [0,\pi), \quad \varphi \in [0,2\pi), \\ z &= l\,\mathrm{cosh}u\,\cos\theta. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Definitionsgleichung eines Rotationsellipsoids

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad b > a,$$

erfüllt ist, und bestimmen Sie daraus u in Abhängigkeit von a und b.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ eines Massenpunktes, der sich auf der Oberfläche bewegt.

(c) Bestimmen Sie die Bogenlänge für eine Kurve mit konstantem θ, indem Sie einen geeigneten Bahnparameter wählen. Was ergibt sich für eine geschlossene Bahnkurve? Sei nun auch u variabel.

(d) Konstruieren Sie die Einheitsvektoren $\{\vec{e}_u, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$ des elliptischen Koordinatensystems!

(e) Betrachten Sie den sphärischen Grenzfall $a = b = r$ und zeigen Sie, dass sich die in der vorigen Teilaufgabe bestimmten Einheitsvektoren auf die bekannten Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten reduzieren.

Hinweis: $\mathrm{sinh}'x = \mathrm{cosh}x,\ \mathrm{cosh}'x = \mathrm{sinh}x,\ \mathrm{cosh}^2x - \mathrm{sinh}^2x = 1$

P2. Lagrange Multiplikatoren
Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = -20(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2.$$

(a) Berechnen Sie die Extrema von $f(x,y)$.

(b) Nehmen Sie nun an, dass die Nebenbedingung $y = x$ gefordert wird. Berechnen Sie die Ableitungen der Funktion

$$\tilde{f}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(y-x)$$

in den Koordinaten (x,y,λ). Welche der Extrema von $f(x,y)$ sind auch Extrema von $\tilde{f}(x,y,\lambda)$?

P3. Differential Gleichungen
Lösen Sie folgende Differential Gleichungen für $y(x)$ allgemein;

(a) $y' = -y^2$

(b) $y' = y^2 + 1$

(c) $y' = x$

(d) $y'' + 7y' + 12y = 0$

Berechnen Sie zudem die erste Ableitung $h'(x)$ der Funktion

$$h(x) = \cos^2\left[\frac{1}{2x}\mathrm{Log}\left(x^2\sqrt{\frac{5x^3-6x}{10x-1}}-3\right)\right] + \sin^2\left[\frac{1}{2x}\mathrm{Log}\left(x^2\sqrt{\frac{5x^3-6x}{10x-1}}-3\right)\right]$$

Hinweis: $\int \mathrm{d}x \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x) + c$