Stochastische Prozesse
Übungsblatt 8

Vorlesung: Otfried Gühne, Übung: Timo Simnacher (B-111, timo.simnacher@physik.uni-siegen.de)
Vorlesung: Mi 16-18 Uhr (D-120), Übung: Fr 10-12 Uhr (D-115)

Ausgabe am 04.12.2019. Zu bearbeiten bis 11.12.2019.

1. **Fokker-Planck-Gleichung** ($3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)
   In dieser Aufgabe geht es um die Verifikation von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen durch die Fokker-Planck-Gleichung.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $x(t) = e^{-bW^2(t)}$, wobei $W(t)$ einen Wiener Prozess beschreibt. Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert von x^2 jeweils mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung von W und x.

   b) Lösen Sie die Differentialgleichung

   $$dx = 3a(x^{1/3} - x)dt + 3\sqrt{a}x^{2/3}dW \tag{1}$$

   mit Hilfe der Transformation $y = x^{1/3}$.

   c) Überprüfen Sie Ihre Lösungen aus a) und b), indem Sie zeigen, dass diese die Fokker-Planck-Gleichung erfüllen.

Präsenzübung 8

Bearbeitung am 06.12.2019.

2. **Black-Scholes-Gleichung**
   Nehmen Sie an, dass die Volatilität und der Zinssatz in der Black-Scholes-Gleichung

   $$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2}$$

   nicht konstant, sondern stattdessen bekannte Funktionen $\sigma(t)$ und $r(t)$ der Zeit sind.

   a) Ersetzen Sie, wie in Übung 7, $S = Ee^x$ und $V = Ev(x,t)$ und außerdem $t = T - t'$. Skalieren Sie dann die Zeit mit der Volatilität, sodass $\frac{1}{2}\sigma^2(t')dt' = d\tau$ und

   $$\tau(t') = \int_0^{t'} \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds. \tag{3}$$

   Als Ergebnis erhalten Sie

   $$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a(\tau)\frac{\partial v}{\partial x} - b(\tau)v, \tag{4}$$

   wobei $a(\tau) = r/(\frac{1}{2}\sigma^2) - 1$ und $b(\tau) = r/(\frac{1}{2}\sigma^2)$

   b) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung ohne den Term zweiter Ordnung allgemein durch

   $$v(x,\tau) = F(x + A(\tau))e^{-B(\tau)} \tag{5}$$

   gelöst wird, wobei A und B jeweils Stammfunktionen von a und b sind und F eine allgemeine Funktion.

   c) Finden Sie nun eine Lösung der vollständigen Gleichung der Form $v(x,\tau) = e^{-B(\tau)}W(\hat{x},\tau)$, wobei $\hat{x} = x + A(\tau)$ ist.