Stochastische Prozesse
Übungsblatt 7

Vorlesung: Otfried Gühne, Übung: Timo Simnacher (B-111, timo.simnacher@physik.uni-siegen.de)
Vorlesung: Mi 16-18 Uhr (D-120), Übung: Fr 10-12 Uhr (D-115)

Ausgabe am 27.11.2019. Zu bearbeiten bis 04.12.2019.

1. **Europäische Optionen** $(3+3+3+1=10$ Punkte)
   In der Vorlesung wurde die Black-Scholes-Gleichung
   $$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{1}$$
   hergeleitet, wobei V den Wert einer Option, r den konstanten Zinssatz, σ die konstante Volatilität und S den Wert der zugrunde liegenden Aktie bezeichnet. In dieser Aufgabe wollen wir die Black-Scholes-Gleichung für eine europäische Option lösen. Der Ausführungspreis der Option zum Zeitpunkt T sei E.

   a) Machen Sie die Ersetzungen $S=Ee^x$, $t=T-\frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ und $V=Ev(x,t)$, um eine dimensionslose Differentialgleichung für $v(x,\tau)$ zu bekommen.
   b) Um die Gleichung weiter zu vereinfachen, ersetzen Sie v durch u, wobei $v(x,\tau)=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$. Wie müssen β und α gewählt werden, damit die resultierende Differentialgleichung für u möglichst einfach wird?
   c) Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus Präsenzübung 2, um die Differentialgleichung zu lösen. Wie müssen die Randbedingungen für $V(S,t)$ bei einer europäischen Call-Option gewählt werden? Zeigen Sie, dass sich daraus die in der Vorlesung angegebene Lösung für $V(S,t)=C(S,t)$ ergibt.
   d) Bestimmen Sie auch den Preis einer europäischen Put-Option.

Präsenzübung 7

Bearbeitung am 29.11.2019.

2. **Portfolios**
   In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit verschiedenen Portfolios.

   a) Zeigen Sie, dass $V_1(S,t)=aS+be^{rt}$ die Black-Scholes-Gleichung löst. Um was für ein Portfolio handelt es sich?
   b) Seien P und C europäische Put- und Call-Optionen mit Ausführungspreis E zum Fälligkeitszeitpunkt T. Zeichnen Sie den Wert der Portfolios $V_2(S,t)=C-P$ und $V_3(S,t)=S-Ee^{r(t-T)}$ zum Fälligkeitszeitpunkt.
   c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $V_2(S,t=0)$ und $V_3(S,t=0)$?