Stochastische Prozesse
Übungsblatt 6

Vorlesung: Otfried Gühne, Übung: Timo Simnacher (B-111, timo.simnacher@physik.uni-siegen.de)
Vorlesung: Mi 16-18 Uhr (D-120), Übung: Fr 10-12 Uhr (D-115)

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit der numerischen Simulation eines stochastischen Prozesses. Bearbeiten Sie die Aufgaben in einem Team von 2-3 Studierenden. Dabei können Sie die Programmiersprache Ihrer Wahl nutzen. Reichen Sie zusätzlich zu Ihrer Lösung Ihren vollständigen, mit sinnvollen Kommentaren versehenen Quelltext ein. In der Präsenzübung wird es eine Einführung in die Programmiersprache Python geben, die Sie zur Lösung der Aufgaben nutzen können. Für Windows-Nutzer empfiehlt sich die vorherige Installation der Anaconda Distribution, auch für Linux- und Mac-User wäre es sinnvoll, sich vorher mit der Einrichtung zu beschäftigen. Bringen Sie, wenn möglich, einen Laptop mit zur Präsenzübung.

Ausgabe am 13.11.2019. Zu bearbeiten bis 27.11.2019.

1. **Stochastische Resonanz: Numerische Simulation** $(1 + 14 + 10 = 25$ Punkte$)$
Stellen Sie sich eine Nervenzelle im Ohr vor, die durch einen Ton mit fester Frequenz f angeregt wird. Wir wollen diesen Prozess als Doppelmulde mit externer Kraft modellieren und den Einfluss von Rauschen untersuchen. In der Vorlesung wurde mit $\langle N(t)\rangle = 0 \cdot p_0(t) + 1 \cdot p_1(t)$ bereits ein Indikator für die Sensitivität des Systems bestimmt, der zeigt, dass Rauschen einen positiven Effekt haben kann. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf die numerische Simulation von möglichen Pfaden dieses stochastischen Prozesses, um die Sensitivität in einer praktischen Realisierung zu untersuchen. Dabei soll die Zeit zwischen Zustandsänderungen und deren Schwankung im Mittelpunkt stehen.
Die Mastergleichung lautet

$$\dot{p}_0(t) = -\mu_1 p_0(t) + \mu_0 p_1(t), \tag{1}$$
$$\dot{p}_1(t) = -\mu_0 p_1(t) + \mu_1 p_0(t) \tag{2}$$

mit den Übergangsraten

$$\mu_1 = \mu e^{-r\cos(\omega t)}, \tag{3}$$
$$\mu_0 = \mu e^{r\cos(\omega t)}, \tag{4}$$

wobei $\mu = \lambda e^{-k/\beta}$, $r = r_0/\beta$ und $\omega = 2\pi f$.

a) Zeichnen Sie zunächst den Prozess in der Automatendarstellung.

b) Um den Prozess numerisch zu simulieren, muss die Zeit in diskrete Zeitschritte aufgeteilt werden. Überlegen Sie sich zunächst sinnvolle Werte für die Parameter μ, r und ω und simulieren Sie den Prozess dann für verschieden große Zeitschritte Δt. Für große Zeiten $t \gg 1/\mu$ ist $\langle N(t)\rangle$ unabhängig von den Anfangsbedingungen durch

$$\langle N(t)\rangle = \frac{1}{2} + \frac{\mu r\cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{4\mu^2 + \omega^2}} \tag{5}$$

gegeben, wobei $\phi = \arctan\left(\frac{\omega}{2\mu}\right)$. Wie klein muss Δt im Verhältnis zu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gewählt werden, um dieses Ergebnis zu reproduzieren? Plotten Sie jeweils eine Realisierung des stochastischen Prozesses für verschieden starkes Rauschen und diskutieren Sie qualitativ die Unterschiede zwischen schwachem, starkem und mittlerem Rauschen, das zu stochastischer Resonanz führt.

c) Plotten Sie außerdem die Verteilung der Zeiten zwischen Zustandsänderungen für verschieden starkes Rauschen. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Verteilungen. Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen? Berechnen Sie die mittlere Abweichung vom jeweils nächstgelegenen Vielfachen von $1/(2f)$. Kann der Informationsgehalt, der durch die Nervenzelle gewonnen wird, durch Rauschen vergrößert werden?

Präsenzübung 5

Bearbeitung am 15.11.2019.

2. Python: Einführung

Die nachfolgenden Aufgaben sollen eine kurze Einführung in Python geben.

a) **Variablen.** Definieren Sie Variablen von verschiedenen Typen. Erzeugen Sie eine Liste von Float-Variablen.

b) **Verzweigungen und Schleifen.** Formulieren Sie eine if-else Verzweigung, eine for-Schleife und eine while-Schleife.

c) **Funktionen.** Definieren Sie eine Funktion, die alle Primzahlen bis n ausgibt.

d) **numpy und matplotlib.** Importieren Sie die beiden Pakete und plotten Sie den Anteil der Primzahlen bis n gegen n.