Stochastische Prozesse
Übungsblatt 5

Vorlesung: Otfried Gühne, Übung: Timo Simnacher (B-111, timo.simnacher@physik.uni-siegen.de)
Vorlesung: Mi 16-18 Uhr (D-120), Übung: Fr 10-12 Uhr (D-115)

Ausgabe am 06.11.2019. Zu bearbeiten bis 13.11.2019.

1. **Itô-Kalkül** $(2+2+2+2+2=10$ Punkte$)$
Im Folgenden benutzen wir den Itô-Kalkül, um die stochastische Differentialgleichung

$$dx = x\mu dt + x\sigma dW \tag{1}$$

zu lösen.

a) Bestimmen Sie zunächst die stochastischen Differentialgleichungen für Ax, x^n und $y = \log x$, wobei $A \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ Konstanten sind.

b) Es stellt sich heraus, dass die Differentialgleichung für y recht einfach ist. Sei nun zum Zeitpunkt $t = 0$ die Verteilung von y (also auch für x) deterministisch. Es gilt also $p(y, t = 0) = \delta(y - y_0)$, wobei $y_0 = \log x_0$. Überlegen Sie sich anhand der stochastischen Differentialgleichung, welcher Art von Verteilung $y(t)$ folgt.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $y(t)$.

d) Sei ϕ eine glatte, streng monotone Funktion (insbesondere existiert die Umkehrfunktion ϕ^{-1}) und seien $f_X(x)$ und $f_Z(z)$ die Wahrscheinlichkeitsdichten der Zufallsvariablen X und Z, wobei $Z = \phi(X)$. Überlegen Sie sich, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Z zwischen a und b ist. Drücken Sie diese Wahrscheinlichkeit auch mithilfe der Dichte von X aus und finden Sie mithilfe einer Variablentransformation eine Formel für die Transformation der Wahrscheinlichkeitsdichte.

e) Nutzen Sie dieses Ergebnis, um die Wahrscheinlichkeitsdichte für $x(t)$ und damit die Lösung für die stochastische Differentialgleichung zu finden.

Präsenzübung 4

Bearbeitung am 08.11.2019.

2. **Stochastische Resonanz**
Wir schauen uns die in der Vorlesung behandelte stochastische Resonanz nochmal genauer an.

a) Beweisen Sie die in der Vorlesung benutzte Formel

$$\partial_t \int_{b(t)}^{a(t)} f(x,t)dx = \dot{a}(t) f(a(t),t) - \dot{b}(t) f(b(t),t) + \int_{b(t)}^{a(t)} \partial_t f(x,t) dx. \tag{2}$$

b) Berechnen Sie explizit die Lösung $p_1(t) = e^{-\Gamma(t)} p_1(0) + \int_0^t e^{\Gamma(t')-\Gamma(t)} \mu_1(t') dt'$ mit $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(t') dt'$ in der Näherung $r \ll 1$, sodass $\mu_n(t) = \mu \left[1 + (-1)^n r \cos(\omega t) + \frac{1}{2} r^2 \cos^2(\omega t)\right]$ und $\gamma(t) = \mu \left[2 + r^2 \cos^2(\omega t)\right]$ für die Anfangsbedingung $p_n(0) = \delta_{n_0 n}$. Die Lösung lautet

$$p_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \kappa(t) - \left[(-1)^{n_0} + \kappa(0)\right] e^{-2\mu t} \right\}, \tag{3}$$

wobei

$$\kappa(t) = \left(\frac{2\mu r}{\sqrt{4\mu^2 + \omega^2}} \right) \cos(\omega t + \phi), \tag{4}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega}{2\mu} \right). \tag{5}$$