Stochastische Prozesse
Übungsblatt 4

Vorlesung: Otfried Gühne, Übung: Timo Simnacher (B-111, timo.simnacher@physik.uni-siegen.de)
Vorlesung: Mi 16-18 Uhr (D-120), Übung: Fr 10-12 Uhr (D-115)

Ausgabe am 30.10.2019. Zu bearbeiten bis 06.11.2019.

1. **Lösung einer Mastergleichung mithilfe der erzeugenden Funktion** ($1 + 2 + 6 + 2 + 2 + 2 = 15$ Punkte)
Wir betrachten einen Sprungprozess, der dem Poisson-Prozess ähnelt. Allerdings hängt die Sprungrate von der Population ab. Die Mastergleichung ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(n-1)p_{n-1}(t) - \lambda n p_n(t),\ n > 0. \tag{2}$$

a) Skizzieren Sie den Prozess für $n = 0, 1, 2$ analog zum Einschritt-Prozess in der Vorlesung in einer Automatendarstellung.

b) Leiten Sie die erzeugende Funktion $G(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$ nach z und t ab, um eine partielle Differentialgleichung für $G(z,t)$ herzuleiten.

c) Diese Differentialgleichung lässt sich durch Separation der Variablen mit dem Ansatz $G(z,t) = H(z)L(t)$ lösen. Zeigen Sie, dass sich die folgenden Differentialgleichungen ergeben, wobei c eine Konstante ist:

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = c\lambda L, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{d}z} = c\frac{H(z)}{z^2 - z}. \tag{4}$$

Lösen Sie diese Gleichungen mithilfe von Separation der Variablen und Partialbruchzerlegung und finden Sie damit eine Lösung für $G(z,t)$.

d) Durch den Ansatz $G(z,t) = H(z)L(t)$ haben Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung gefunden. Die allgemeine Lösung ist durch Linearkombination dieser speziellen Lösung mit verschiedenen Integrationskonstanten gegeben. Eleganter kann die Lösung durch

$$G(z,t) = F[(1 - \frac{1}{z})e^{\lambda t}] \tag{5}$$

angegeben werden, wobei F eine beliebige Funktion ist. Verifizieren Sie, dass dies eine Lösung der Differentialgleichung für $G(z,t)$ ist.

e) Sei nun $p_n(0) = \delta_{nm}$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$ die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$. Finden Sie F, sodass $G(z,t)$ dieser Anfangsbedingung genügt. Möglicherweise ist es einfacher, zunächst die Umkehrfunktion F^{-1} zu finden.

f) Berechnen Sie mithilfe der erzeugenden Funktion den Erwartungswert $\langle n(t) \rangle$.