Stochastische Prozesse
Übungsblatt 3

Vorlesung: Otfried Gühne, Übung: Timo Simnacher (B-111, timo.simnacher@physik.uni-siegen.de)
Vorlesung: Mi 16-18 Uhr (D-120), Übung: Fr 10-12 Uhr (D-115)

Ausgabe am 23.10.2019. Zu bearbeiten bis 30.10.2019.

1. **Parametrische Fluoreszenz II** ($5 + 1 + 5 + 3 + 1 = 15$ Punkte)
   Im Folgenden wollen wir den Prozess aus der Präsenzübung (Aufgabe 2) genauer betrachten.

   a) Finden Sie eine allgemeine Formel für $p_n(t)$ (als Summendarstellung). Eine Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden n ist möglicherweise nützlich. Zeigen Sie die Gültigkeit Ihrer Lösung mittels Induktion.

   b) Skizzieren Sie den Prozess analog zum Einschritt-Prozess in der Vorlesung in einer Automatendarstellung.

   c) Bestimmen Sie wie in der Vorlesung Gleichungen für die Zeitentwicklung der Momente $\langle n^k \rangle$ und berechnen Sie explizit den Erwartungswert und die Varianz.

   d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p_n(t)$ mit $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ für $kt = 1$, $Kt = 1/100$ und $kt = 1/100$, $Kt = 1$. Sie können sich die Rechnung durch sinnvolle Näherungen vereinfachen.

   e) Um welchen Prozess handelt es sich, wenn $K = 0$?

Präsenzübung 3

Bearbeitung am 23.10.2019.

2. **Parametrische Fluoreszenz I**
   Wir betrachten ein Experiment, bei dem in einem nichtlinearen optischen Kristall jeweils ein Photon in zwei Photonen geringerer Energie umgewandelt wird. Diesen Prozess nennt man parametrische Fluoreszenz oder parametric Downconversion. Während durch parametrische Fluoreszenz jeweils zwei Photonen mit Rate K erzeugt werden, gibt es zudem zufällige Zerfälle, die jeweils ein Photon mit Rate k erzeugen. Wir beobachten die Anzahl der erzeugten Photonen n und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_n(t)$.

   a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $p_n(t+\Delta t)$ für ein kleines Zeitintervall Δt in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten $p_n(t)$, $p_{n-1}(t)$ und $p_{n-2}(t)$ an.

   b) Leiten Sie daraus eine Mastergleichung für den beschriebenen Prozess her.

   c) Mit der Anfangsbedingung $p_n(t = 0) = \delta_{0n}$ ergibt sich ein System von gekoppelten Differentialgleichungen. Lösen Sie diese rekursiv für $p_n(t)$ mit $n = 0, 1, 2, 3$ mithilfe von Variation der Konstanten.