Stochastische Prozesse
Übungsblatt 2

Vorlesung: Otfried Gühne, Übung: Timo Simnacher (B-111, timo.simnacher@physik.uni-siegen.de)
Vorlesung: Mi 16-18 Uhr (D-120), Übung: Fr 08-10 Uhr (B-030)

Ausgabe am 16.10.2019. Zu bearbeiten bis 23.10.2019.

1. **Sprungprozess im Gleichgewicht (Master-Gleichung)** ($2 + 1 + 5 + 2 = 10$ Punkte)
   Betrachten Sie einen stochastischen Prozess, der eine Population beschreibt und dementsprechend die Werte $0, 1, 2, \ldots$ annehmen kann. In jedem Zeitschritt nimmt die Population um eine Einheit zu oder ab. Dies passiert jeweils mit den Raten $\gamma_+(N)$ und $\gamma_-(N)$ bei einer aktuellen Population von N.

   a) Formulieren Sie die Mastergleichung für die Wahrscheinlichkeit $p_n(t)$ für eine Populationsgröße von n.
   b) Die Population befinde sich im Gleichgewicht. Was ergibt sich daraus für $p_n(t)$?
   c) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtsverteilung durch

$$p_n(t) = \prod_{m=1}^{n} \frac{\gamma_+(m-1)}{\gamma_-(m)} p_{n=0}(t=0) \tag{1}$$

   gegeben ist. Wie lässt sich $p_{n=0}(t = 0)$ bestimmen?
   d) Welche Bedingung folgt daraus für die Raten $\gamma_+(N)$ und $\gamma_-(N)$, damit ein Gleichgewicht existiert? Wann ist die Gleichgewichtsverteilung eindeutig?

Präsenzübung 2

Bearbeitung am 18.10.2019.

2. **Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung**
   Wir betrachten ein System mit orts- und zeitabhängiger lokaler Teilchenkonzentration $c(\vec{x}, t)$. Die Teilchen können sich frei bewegen, aber nicht erzeugt oder vernichtet werden.

   a) Formulieren Sie die sich daraus ergebende Kontinuitätsgleichung, die die lokale Erhaltung von Teilchen beschreibt. Bezeichnen Sie den Teilchenstrom mit $\vec{j}(\vec{x}, t)$.
   Lösung: Es gilt: Die Zu- und Abnahme der Konzentration kann nur durch einen Teilchenstrom verursacht werden. Also ist

$$\frac{\partial c(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) \tag{2}$$

   mit dem Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   Zur Verdeutlichung kann ein infinitesimales Volumen betrachtet werden.
   b) Das empirische 1. Ficksche Gesetz besagt, dass der Teilchenstrom proportional zu Konzentrationsunterschieden ist. Es gilt also $\vec{j}(\vec{x}, t) = -D\vec{\nabla}c(\vec{x}, t)$ mit dem Diffusionskoeffizienten D. Durch Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung ergibt sich die Diffusionsgleichung.
   Lösung: Die Diffusionsgleichung lautet demnach

$$\frac{\partial c(\vec{x}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot D\vec{\nabla}c(\vec{x}, t) \tag{4}$$

$$= D\ \Delta c(\vec{x}, t) \tag{5}$$

   mit dem Laplace-Operator $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$.

c) Zeigen Sie, dass die Verteilung des Wiener Prozesses

$$c(x,t) = \int dx_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}\right) c(x_0,t_0) \tag{6}$$

die eindimensionale Diffusionsgleichung löst. Was folgt für den Diffusionskoeffizienten D? Wie lautet die allgemeine Lösung für beliebige D und Anfangsbedingungen? **Lösung:** Die eindimensionale Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Für die Verteilung des Wiener Prozesses erhalten wir

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int dx_0 \left(-\frac{1}{2}\frac{2\pi}{2\pi(t-t_0)} + \frac{(x-x_0)^2)}{2(t-t_0)^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}\right) c(x_0,t_0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int dx_0 \left(-\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}\right) c(x_0,t_0), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int dx_0 \left(-\frac{1}{t-t_0} + \frac{(x-x_0)^2}{(t-t_0)^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}\right) c(x_0,t_0), \tag{10}$$

woraus für den Diffusionskoeffizienten folgt $D = \frac{1}{2}$. Für allgemeines D brauchen wir im Exponenten den zusätzlichen Faktor $D/2$. Also lautet die allgemeine Lösung (beachte Normierung!)

$$c(x,t) = \int dx_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-t_0)/D}} \exp\left(-\frac{D(x-x_0)^2}{4(t-t_0)}\right) c(x_0,t_0). \tag{11}$$

d) Die Wärmeleitungsgleichung hat die gleiche Form wie die Diffusionsgleichung. Dabei hängt der Diffusionskoeffizient von den Materialeigenschaften Wärmeleitfähigkeit λ, spezifischer Wärmekapazität c und Dichte ρ ab. Überlegen Sie sich, wie der Zusammenhang lautet, indem Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = 0, \tag{12}$$

wobei T die Temperatur bezeichnet, analog zur Diffusionsgleichung herleiten. **Lösung:** In einem kleinen abgeschlossenen Volumen (wir vernachlässigen also Konvektion) ist die Änderung der inneren Energie durch den Wärmefluss durch die Oberfläche gegeben. Es gilt also die Kontinuitätsgleichung (pro Volumen)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q}. \tag{13}$$

Mit der Wärmeleitfähigkeit λ ist $\vec{q} = -\lambda na\vec{b}laT$ (Fouriersches Gesetz, vgl. 1. Ficksches Gesetz). Die innere Energie pro Volumen hängt über die spezifische Wärmekapazität c und der Dichte ρ mit der Temperatur zusammen: $u = c\rho T$. Damit folgt die Wärmeleitungsgleichung mit $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.