

Klimaphysik

Übungsblatt VIII

Vorlesung: PD. Dr. M. Kleinmann
Übungen: K. Hansenne

Ausgabe: Dienstag, 27.06.2023
Abgabe: Dienstag, 04.07.2023

1. Rossby Wellen (10+15+15+10+10+5+5+10)

Die Stromfunktion $\psi(x, y)$ in der Strömungsmechanik ist eine Funktion (mit komplexen Werten), die für Strömungen verschiedener Art definiert ist. Sie gibt den Parameter der nicht divergierenden Komponente eines beliebigen Geschwindigkeitsfeldes an, dessen Wert entlang jeder Stromlinie konstant ist. Sie kann daher verwendet werden, um die Stromlinien einer Flüssigkeit darzustellen, die den Trajektorien von Partikeln in einer stationären Strömung entsprechen. Die Strömungsgeschwindigkeitskomponenten können als Ableitungen der Skalarstromfunktion ausgedrückt werden:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Die Stromfunktion kann verwendet werden, um Stromlinien zu zeichnen, die die Trajektorien von Partikeln in einer stationären Strömung darstellen.

- (a) Drücken Sie die relative Vortizität ζ als Funktion der Stromfunktion aus.
(b) Wir wählen x in Richtung Osten, y in Richtung Norden, z Richtung oben. Stellen Sie ausgehend von der Vortizität-Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{\nabla}_H \cdot (\eta \vec{v}) = 0 \quad (2)$$

eine Differentialgleichung für die Stromfunktion im Fall einer divergenzfreien Strömung ($\vec{\nabla}_H \cdot \vec{v} = 0$) auf. Verwenden Sie, dass die Veränderungen der relativen Vorticity in der y -Richtung vernachlässigbar sind. Verwenden Sie den Rossby-Parameter $\beta = \frac{2\Omega}{R} \cos(\phi)$ in Ihrem Ergebnis.

- (c) Bestimmen Sie unter Verwendung des Ansatzes $\psi = \psi_0 \exp[i(kx + ly - \omega t)]$ die zonale (x -Richtung) Dispersionsrelation für Rossby-Wellen. Die Größen k und l sind die zonale bzw. meridionale (y -Richtung) Wellenzahl und ω ist die Kreisfrequenz.
Zur Erinnerung: Die Dispersionsrelation gibt die Beziehung zwischen der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl k an.
(d) Zeigen Sie, dass die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit durch

$$c = \frac{w}{k} = v_0 - \beta \frac{1}{k^2 + l^2} \quad (3)$$

bzw.

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_0 - \beta \frac{l^2 - k^2}{(k^2 + l^2)^2} \quad (4)$$

gegeben sind, wobei v_0 die Strömungsgeschwindigkeit ist, mit $v_x \sim v_0$.

- (e) In welche Richtungen verlaufen die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeiten, bezogen auf die ursprüngliche Geschwindigkeit v_0 ?
(f) Angenommen, die Welle ist stationär. Bestimmen Sie die zonale Wellenlänge ($\lambda = 2\pi/k$) und vernachlässigen Sie dabei die meridionale Wellenzahl (d. h. $l = 0$). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus der Vorlesung.
(g) Schätzen Sie die Gruppengeschwindigkeit mit denselben Annahmen wie bei (f).
(h) Warum ist es vernünftig, die meridionale Wellenzahl l zu vernachlässigen?