Klimaphysik
Übungsblatt V

Vorlesung: PD. Dr. M. Kleinmann — Ausgabe: Dienstag, 23.05.2023
Übungen: K. Hansenne — Abgabe: Dienstag, 06.06.2023

---

1. Geostrophischer Wind (10)
Bei 50°N auf der Erde messen wir einen geostrophischen Wind von $30\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Wenn man weiß, dass der Druckgradient zum Nordpol hin gerichtet ist, wie groß ist dann seine Intensität? In welche Richtung weht der Wind? Als Lufdichte, nehmen Sie $\rho = 1,2041\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

2. Geopotentielle Höhe (10)
Ein Flugzeug fliegt am Südpol los und will am Äquator landen. Die geopotentielle Höhe wird während des gesamten Fluges auf 10 km gehalten. Leiten Sie die Höhe, in der das Flugzeug fliegen muss, in Abhängigkeit von der geografischen Breite φ ab. Zeichnen Sie die Funktion für $\varphi \in [-\pi/2, 0]$.

3. Hydrostatik, Couette- und Hagen-Poiseuille-Strömungen (10+10+10+5+10+5)
Es wird eine Charakterisierung der Strömung eines inkompressibles Fluids zwischen zwei unendlichen Platten gesucht. Dazu vernachlässigt man die Coriolis-Beschleunigung, nimmt an, dass die Schwerkraft konstant ist und berücksichtigt die Reibungskräfte. Die Navier-Stokes-Gleichung wird daher wie folgt geschrieben:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi + \eta \nabla^2 \vec{v}, \tag{1}$$

wobei η die dynamische Viskosität ist.

(a) Zunächste betrachten wir den statischen Fall. Das Fluid befindet sich zwischen zwei Platten, wie in Abbildung 1(a) (nächste Seite) gezeigt. Leiten Sie mithilfe der Navier-Stokes-Gleichung den Ausdruck für den Druck $p(x, z)$ her.

(b) Die oberste Platte wird nun mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ bewegt, wie in Abbildung 1(b) gezeigt. Lösen Sie die Navier-Stokes-Gleichung und geben Sie den Ausdruck für die Geschwindigkeit $\vec{v}(x, z)$ an.
Hinweis: Verwenden Sie $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $v_z = 0$, $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, $v_x(z = 0) = 0$, $v_x(z = h) = v_0$.

(c) Begründen Sie, warum die sechs Gleichungen im Hinweis zur (b) gültig sind.

(d) Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil aus (b).

(e) Schließlich nehmen wir an, dass, während sich die obere Platte noch mit einer Geschwindigkeit $v_0 \vec{e}_x$ bewegt, ein Druckgradient entlang der x-Achse besteht,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_- - p_+}{L} = \frac{\Delta p}{L}. \tag{2}$$

Die Situation ist in Abbildung 1(c) dargestellt. Geben Sie mit Hilfe der Navier-Stockes-Gleichung einen Ausdruck für $\vec{v}(x, z)$ an.

(f) Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil aus (e).

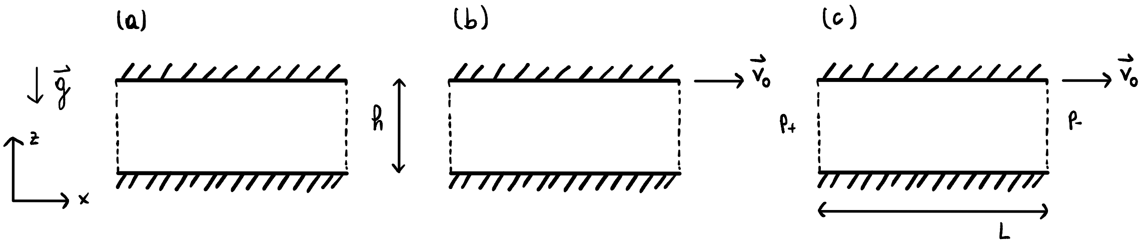

Abbildung 1: Hydrostatik, Couette- und Hagen-Poiseuille-Strömungen.