Statistische Physik
Übungsblatt 1

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Ties-Albrecht Ohst

Abgabe: Mi, 13. April 2022

1. **Dichtematrizen** (4 Punkte)
   Wir untersuchen folgende Schar von Matrizen,

$$\varrho(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & \lambda & i/4 & 0 \\ 0 & -i/4 & m/16 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

   wobei Sie für m die dritte Ziffer Ihrer Matrikelnummer einsetzen.

   (a) Geben Sie den Bereich für μ und λ an, so dass $\varrho(\lambda,\mu)$ eine Dichtematrix ist.

   (b) Sei $\varrho(\lambda,\mu)$ nun die gemeinsame Dichtematrix zweier Spin-1/2-Systeme (entwickelt in der geordneten Basis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$). Wie lauten die reduzierten Dichtematrizen ϱ_A und ϱ_B für die einzelnen Spins? Wann gilt $\varrho = \varrho_A \otimes \varrho_B$?

2. **Die Geometrie von Zuständen** (4 Punkte)

   (a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\varrho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Dichtematrix. Zeigen Sie folgende Aussagen:

      i. Kann ϱ als Konvexkombination von n Elementen geschrieben werden, also

$$\varrho = \lambda_1\varrho_1 + \cdots + \lambda_n\varrho_n \quad \text{mit} \quad \lambda_k > 0 \text{ und } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \tag{1}$$

      so auch als Konvexkombination von zwei Elementen, d.h. $\varrho = \lambda\varrho_1 + (1-\lambda)\varrho_2$.

      ii. Ist ϱ kein reiner Zustand, dann existieren $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\varrho_1 \neq \varrho_2$ derart, dass $\varrho = \frac{1}{2}\varrho_1 + \frac{1}{2}\varrho_2$.

   (b) In dieser Aufgabe wollen wir die Geometrie des Zustandsraums eines Qubits, also eines 2-Level Systems, untersuchen. Machen Sie sich zunächst klar, dass jeder hermitesche Operator $\varrho \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ geschrieben werden kann als

$$\varrho(\alpha, x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\alpha\mathbb{1} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z\right) \tag{2}$$

   mit den aus der Vorlesung bekannten Pauli Matrizen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Bestimmen Sie den Wertebereich der reellen Parameter α, x, y, z derart, dass $\varrho(\alpha, x, y, z)$ eine zulässige Dichtematrix repräsentiert. Skizzieren Sie diesen Bereich für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und untersuchen Sie, wo sich die reinen Zustände befinden.