Statistische Physik
Übungsblatt 3

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Ties-Albrecht Ohst

Abgabe: Mi, 27. April 2022

1. **Positiv-Semidefinite Matrizen** (2 Punkte)
   Zeigen Sie, dass für eine Hermitesche 2×2-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) A hat keine negativen Eigenwerte.

   (b) $\langle\psi| A |\psi\rangle \geq 0$ für alle Vektoren $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$.

   (c) $\det(A) \geq 0$, $a_{11} \geq 0$ und $a_{22} \geq 0$.

2. **Operatorfunktionen** ($2 + 2 = 4$ Punkte)
   Betrachten wir einen Hermiteschen Operator W in einem $N-$dimensionalen Quantensystem, welcher mithilfe der Spektralzerlegung durch

$$W = \sum_{i=1}^{N} w_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \tag{1}$$

   dargestellt werden kann, wobei $w_i \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte und $|\psi_i\rangle$ die zugehörigen normierten Eigenvektoren von W sind. Eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kann unter der Voraussetzung, dass f auf dem Spektrum von W definiert ist, auf den Operator W durch

$$f(W) := \sum_{i=1}^{N} f(w_i) |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \tag{2}$$

   angewendet werden.

   (a) Bestimmen Sie die Quadratwurzel $\sqrt{A}$ und den Logarithmus $\ln(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   (b) Sei $\vec{r}$ ein dreidimensionaler reeller Einheitsvektor und $\phi \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Identität

$$\exp(i\phi\, \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \cos(\phi)\mathbb{1} + i\sin(\phi)\vec{r} \cdot \vec{\sigma}, \tag{4}$$

   wobei $\vec{\sigma}$ der Vektor der drei Pauli Matrizen ist und $\sum_{i=1}^{3} r_i\sigma_i$.

Bitte wenden!

3. **Zeitentwicklung von Dichtematrizen** $(2+1+2=5$ Punkte)
Die zeitliche Änderung einer Dichtematrix ϱ innerhalb eines System, das durch den Hamilton-Operator H beschrieben ist, ist im Schrödinger-Bild durch die von-Neumann Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H, \varrho] \tag{5}$$

gegeben. Im Folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, dass das betrachtete Quantensystem $N-$dimensional ist, und H sowie ϱ durch Hermitesche $N \times N$ Matrizen beschrieben werden können, sodass die obige Gleichung komponentenweise verstanden werden kann.

(a) Sei $\varrho(0)$ eine Dichtematrix zum Zeitpunkt $t=0$ und sei $U(t) := e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \sum_{j=1}^{N} e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} |\psi_j\rangle \langle\psi_j|$ der so genannte Zeitentwicklungsoperator bezüglich H, wobei hier E_j und $|\psi_j\rangle$ die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von H sind.
Zeigen Sie, dass die Dichtematrix $\varrho(t)$, definiert durch

$$\varrho(t) = U(t)\varrho(0)U(t)^\dagger, \tag{6}$$

die Lösung der von-Neumann Gleichung (5) zum Zeitpunkt $t \geq 0$ ist.
(Hinweis: Es ist nützlich, $\varrho(0)$ in der Basis der Eigenvektoren von H auszudrücken und es genügt, die Gleichheit für die Komponenten von $\varrho(t)$ zu zeigen.)

(b) Sei λ eine reelle Konstante und sei die Dichtematrix $\varrho(0)$ zum Zeitpunkte $t=0$ bestimmt durch

$$\varrho(0) = \frac{e^{-\lambda H}}{\mathrm{Tr}(e^{-\lambda H})} = \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda E_i} |\psi_i\rangle \langle\psi_i|}{\sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda E_i}}. \tag{7}$$

Bestimmen Sie, wie sich $\varrho(0)$ unter Einfluss des Hamiltion-Operators H zeitlich entwickelt.

(c) Wir betrachten nun ein Zwei-Niveau System mit dem Hamilton-Operator $H = \hbar\omega\sigma_z$ mit konstantem und reellem ω. Die Operatoren σ_x,σ_y,σ_z sind hier die üblichen Pauli-Matrizen. Zum Zeitpunkt $t=0$ sei der Zustand $\varrho(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$ mit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ gegeben.

   i. Berechnen Sie die Dichtematrix $\varrho(t)$ für Zeitpunkte $t > 0$.
   ii. Bestimmen Sie die Erwartungswerte der Observablen σ_y und σ_z im Zustand $\varrho(t)$.