Statistische Physik
Übungsblatt 2

Vorlesung: Prof. Dr. Otfried Gühne
Übungen: Ties-Albrecht Ohst

Abgabe: Mi, 20. April 2022

1. **Das schwache Gesetz der großen Zahlen** ($1+1+1+1=4$ Punkte)
In der Vorlesung haben wir bereits die Tschebyscheff-Ungleichung kennengelernt, welche uns für eine Zufallsvariable X eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür liefert, dass X mehr als einen vorgegebenen Schwellenwert vom Erwartungswert abweicht. Als eine Folgerung der Tschebyscheff-Ungleichung kann das sogenannte *schwache Gesetz der großen Zahlen* (WLLN) gesehen werden, welches folgendes besagt:
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswerten $\langle X_1 \rangle = \ldots = \langle X_n \rangle = \mu$. Ferner bezeichne mit
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right) \tag{1}$$
den zentrierten Mittelwert. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$, dass
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\, |\,\overline{X}_n - \mu\,| \geq \epsilon\,\right] = 0 \tag{2}$$
Wir wollen dieses nun beweisen. Dafür können Sie wie folgt vorgehen:
   (a) Zeigen Sie zunächst, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ für die Varianz $\sigma^2(\alpha X) = \alpha^2 \sigma^2(X)$ gilt
   (b) Ist für allgemeine Zufallsvariablen X und Y die Varianz additiv, d.h. gilt $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$? Was kann man hier sagen, falls X und Y unabhängig und identisch verteilt sind?
   (c) Berechnen Sie $\sigma^2\left(\overline{X}_n\right)$
   (d) Benutzen Sie nun die Tschebyscheff-Ungleichung für die Zufallsvariable $\overline{X}_n$

2. **Binäre Entropie** ($2+2=4$ Punkte)
Die Entropien der binären Verteilungen $P = \{p, 1-p\}$, $p \in [0,1]$, sind durch die Funktion
$$S(p) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$
gegeben.
   (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion S.
   (b) Bestimmen Sie den Mittelwert der Entropien aller möglichen binären Verteilungen.
   (Hinweis: Der Mittelwert $\bar{f}$ einer stetigen Funktion f auf einem Interval $[a,b]$ kann durch
   $$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
   berechnet werden.)

Bitte wenden!

3. **Tsallis-Entropie** $(2 + 2 = 4$ Punkte)
Die Tsallis-Entropie mit Parameter $q > 1$ für eine Verteilung $P = \{p_k\}$ ist gegeben durch

$$S_q(P) = [1 - \textstyle\sum_k (p_k)^q]/(q - 1).$$

(a) Testen Sie Konkavität und Additivität für die Tsallis-Entropie.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{q\to 1} S_q(P)$.