Theoretische Physik: Elektrodynamik
Übungsblatt 9

Vorlesung: Matthias Kleinmann, Übungen: Andreas Ketterer, Timo Simnacher, Fabian Bernards
Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308), Übungen: Fr. 8–10 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 19.06.2018

1. Energiefluss im Ohmschen Leiter (2+2 Punkte)

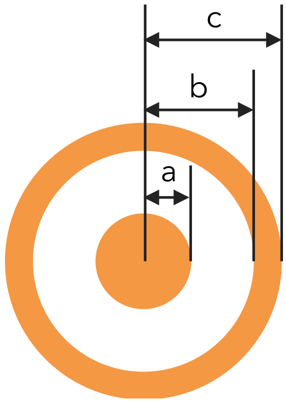
Ein Ohmscher Leiter ist durch die Proportionalitätsbeziehung $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, mit der spezifischen Leitfähigkeit σ, gekennzeichnet. Wir betrachten einen Ohmschen Leiter in Form eines Drahtes mit Querschnittsradius R durch den ein Strom I fließt.

(i) Berechnen Sie den Poynting-Vektor innerhalb des Drahtes. Für das Magnetfeld können Sie dazu das Ergebnis der Aufg. 1(ii) von Blatt 7 verwenden.

(ii) Überprüfen Sie, dass der Poynting-Vektor das Poynting'sche Theorem erfüllt. In welche Richtung findet ein Energietransport statt?

2. Koaxialkabel (3+1+2 Punkte)

Wir betrachten ein sehr langes Doppelkabel bestehend aus einem inneren Leiter mit Querschnittsradius a und einem äußeren Leiter, welcher die Form eines Hohlzylinders hat mit Innenradius b und Außenradius c.



Ein Gleichstrom I fließe durch den inneren Leiter in eine Richtung und durch den äußeren Leiter zurück. Zwischen den beiden Leitern bestehe eine konstante Spannung U_0, die durch einen Verbraucher (z.B. einen Widerstand) am Ende der Leitung hervorgerufen wird. Der ohmsche Widerstand der Leitung kann vernachlässigt werden.

(i) Bestimmen Sie das skalare elektrische Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$ im Zwischenraum ($a < r < b$) als Lösung der Laplace-Gleichung. Verwenden Sie dazu die Darstellung des Laplace-Operators in den Koordinaten, die der Symmetrie des Problems angepasst sind. Die auftretende Integrationskonstante soll durch U_0 ausgedrückt werden.

(ii) Bestimmen Sie das elektrische Feld zwischen den Leitern.

(iii) Berechnen Sie den Poynting-Vektor zwischen den Leitern. Wie groß ist die pro Zeiteinheit transportierte Energie und in welche Richtung fließt sie?
Tipp: Um den Poynting-Vektor zu berechnen können Sie die Lösung aus Aufg. 1(ii) von Blatt 7 verwenden. Argumentieren Sie dazu warum der äußere Leiter keinen zusätzlichen Magnetfeldanteil im inneren erzeugt.

3. Skin-Effekt (2+2+2+2 Punkte)

Wir betrachten einen geraden unendlich langen Draht mit Querschnittsradius r_0 und elektrischer Leitfähigkeit σ. Außerhalb des Drahtes sei die Leitfähigkeit gleich Null. Im Folgenden interessieren wir uns für zeitlich periodische Lösungen der Maxwell-Gleichungen der Form: $\boldsymbol{E} = E(r)e^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_z$.

(i) Argumentieren Sie warum in diesem Fall, für $\tau = 2\pi/\omega \gg r_0/c$, der Verschiebungsstrom $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ vernachlässigt werden kann.

(ii) Zeigen Sie, mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, dass der z-Anteil des elektrischen Feldes durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\Delta E = -i\omega\mu\sigma E. \tag{1}$$

Wie lautet diese Gleichung in Zylinderkoordinaten innerhalb und außerhalb des Drahtes?

(iii) Wie lautet die allgemeine Lösung von Gleichung (1) außerhalb des Drahtes.

(iv) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten durch Ausnutzung der Randbedingungen bei $r \to \infty$ und $r = r_0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.
Tipp: Eine Randbedingung bei $r = r_0$, welche das innere und das äußere Feld verknüpft, erhalten Sie durch Integration der Gleichung $\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ über ein kleines Volumen $\Delta^3 r = a\Delta F$ am Rand des Leiters (Stok'sches Kästchen).