Theoretische Physik: Elektrodynamik
Übungsblatt 11

Vorlesung: Matthias Kleinmann, Übungen: Andreas Ketterer, Timo Simnacher, Fabian Bernards
Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308), Übungen: Fr. 8–10 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 03.07.2018

1. Komplexe und reelle Darstellung von Wellenfunktionen (2+2+2 Punkte)

Elektromagnetischen Felder werden aus mathematischer Zeckmäßigkeit oft als komplex angesetzt. Dies ist erlaubt, da die linearen Operationen der relevanten Differenzialgleichungen Real- und Imaginärteile nicht mischen, sodass man den Übergang zum physikalischen Resultat (Realteil) erst ganz zum Schluss vollziehen muss. Bei der Energiedichte $w(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\right)$ und der Energiestromdichte $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ handelt es sich jedoch um nichtlineare Ausdrücke für die man von Anfang an reell rechnen muss. Betrachten wir nun elekromagnetische Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_0\epsilon_r\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\mu_r\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t). \tag{2}$$

(i) Berechnen Sie das Zeitmittel $\overline{w(\boldsymbol{r},t)} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} w(\boldsymbol{r},t')dt'$, wobei $\tau = 2\pi/\omega$ einer charakteristischen Periode entspricht. Benutzen Sie die komplexen Ansätze (1) und (2).

(ii) Berechnen Sie nun $\overline{w(\boldsymbol{r},t)} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} w(\boldsymbol{r},t')dt'$, unter Verwendung der Realteile der Felder (1) und (2).

(iii) Berechnen Sie außerdem $\overline{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t')dt'$, unter Verwendung der Realteile der Felder (1) und (2).

2. Elektromagnetische Wellen im Isolator (1+2+2+2+2+2 Punkte)

In einem linearen, isotropen, ungeladenen Isolator (ϵ_r, μ_r) sei die magnetische Induktion durch $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ mit $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) = (\alpha\boldsymbol{e}_x + i\gamma\boldsymbol{e}_y)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ und $(\alpha,\gamma\in\mathbb{R})$ gegeben. $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ sei eine Lösung der Maxwell-Gleichungen.

(i) Löst $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ auch die homogene Wellengleichung?

(ii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen k und ω?

(iii) Bestimmen Sie die Richtung des Wellenvektors $\boldsymbol{k}$.

(iv) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$.

(v) Drücken Sie die zeitgemittelte Energiedichte $\overline{w(\boldsymbol{r},t)}$ des elektromagnetischen Feldes als Funktion von α und γ aus.

(vi) Berechnen Sie die zeitgemittelte Energiestromdichte $\overline{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)}$ als Funktion von α und γ. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\overline{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)}$ und $\overline{w(\boldsymbol{r},t)}$?

3. Kondensator mit Kreisförmigen Platten (5 Punkte)

Gegeben sei eine Anordnung aus zwei parallelen kreisförmigen Metallplatten vernachlässigbarer Dicke mit Radius R im Abstand d. Der Raum zwischen den Platten sei mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen Dielektrizitätskonstante gemäß $\epsilon_r(z) = \epsilon_1 + \frac{1}{2}\Delta\epsilon(1 + 2\frac{z}{d})$ vom Ort abhängt mit $R \ll d$. In diesem Fall ergibt sich für die elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten: $\boldsymbol{E}(z) = E(z)\boldsymbol{e}_z$, mit $E(z) = \frac{-1}{\epsilon_0\epsilon_r(z)}\frac{Q}{\pi R^2}$.

Wie groß sind die elektrostatischen Kräfte, die auf die Platten wirken? Benutzen Sie die Formel für den Maxwell'schen Spannungstensor:

$$T_{ij} = \epsilon_r\epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_r\mu_0}B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\epsilon_r\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_r\mu_0}\right). \tag{3}$$