

Aufgabe 1: Eigenschaften von Observablen

Zeigen Sie, dass für alle Observablen C und D die folgenden Eigenschaften gelten:

- a) $\langle C \rangle^2 \leq \langle C^2 \rangle$,
- b) $\max_{\varrho} \text{tr} [C \varrho] = \max_{|\psi\rangle} \langle \psi | C | \psi \rangle$, das Maximum der Spur wird für einen reinen Zustand erreicht.
- c) $\max_{|\psi\rangle} |\langle \psi | C \otimes D | \psi \rangle| = \max_{|\varphi\rangle_A} |\langle \varphi | C | \varphi \rangle| \cdot |\langle \varphi \rangle_B | D | \varphi \rangle_B|$, das Maximum wird durch einen Produktzustand erreicht.

Aufgabe 2: Nonlocality for Two Particles without Inequalities for Almost all Entangled States[1]

Ein bipartiter Zustand mit der Schmidtzerlegung $|\psi\rangle = \lambda_0 |a_1 a_2\rangle + \lambda_1 |b_1 b_2\rangle$ kann durch geeignete Wahl der Orthonormalbasen $\{|u_i\rangle, |v_i\rangle\}$ und $\{|c_i\rangle, |d_i\rangle\}$ (Wobei i das Teilchen bezeichnet) auf folgende vier Weisen geschrieben werden.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= N (AB |u_1\rangle |v_2\rangle + AB |v_1\rangle |u_2\rangle + B^2 |v_1\rangle |v_2\rangle), \\ |\psi\rangle &= N (|c_1\rangle (A |u_2\rangle + B |v_2\rangle) - A^2 (A^* |c_1\rangle - B |d_1\rangle) |u_2\rangle), \\ |\psi\rangle &= N ((A |u_1\rangle + B |v_1\rangle) |c_2\rangle - A^2 |u_1\rangle (A^* |c_2\rangle - B |d_2\rangle)), \\ |\psi\rangle &= N (|c_1\rangle |c_2\rangle - A^2 (A^* |c_1\rangle - B |d_1\rangle) (A^* |c_2\rangle - B |d_2\rangle)), \end{aligned}$$

mit N einer Normierungskonstante und $A = \frac{\sqrt{\lambda_0 \lambda_1}}{\sqrt{1 - |\lambda_0 \lambda_1|}}$ und $B = \frac{|\lambda_0| - |\lambda_1|}{\sqrt{1 - |\lambda_0 \lambda_1|}}$. Betrachten sie im folgenden die Observablen $U_i = |u_i\rangle\langle u_i|$ und $D_i = |d_i\rangle\langle d_i|$.

- a) Zeigen Sie, dass das Produkt der Messergebnisse wenn U_1 und U_2 gemessen wurde immer “0” ist.
- b) Betrachten Sie die Messung von D_i und U_j mit $i \neq j$ und $i, j \in \{1, 2\}$. Welche Aussage kann über das Messergebnis von U_j getroffen werden unter der Annahme, dass beide Messungen von D_i das Ergebnis “1” auftrat.
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei der Messung von D_1 und D_2 jeweils der Wert “1” auf?
- d) Argumentieren Sie auf Basis von a)-c) und unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe c) nicht null ist, dass die Quantenmechanik nicht kompatibel mit lokal-realistischen Modellen ist.

Literatur

- [1] L. Hardy, Phys. Rev. Let., **71**, 1665 (1993)