
Aufgabe 1: Schmidt-Zerlegung

Bestimmen Sie für folgende Zustände die Schmidt-Koeffizienten und die Schmidt-Basis.

a) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\alpha\,|00\rangle + i\sin\alpha\,|11\rangle + i\sin\alpha\,|10\rangle + \cos\alpha\,|01\rangle\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$

b)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\left(\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)|00\rangle + \left(\cos\beta - \frac{2\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)|01\rangle + \left(\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)|02\rangle$$
$$+ i\left(\cos\beta - \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)|10\rangle + i\left(\cos\beta + \frac{2\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)|11\rangle + i\left(\cos\beta\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)|12\rangle\Big], \quad \beta \in \mathbb{R}$$

c) $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos\alpha\,|00\rangle + i\sin\alpha\,|10\rangle + \cos\alpha\,|11\rangle + i\sin\alpha\,|01\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}|22\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) Berechnen Sie die Schmidt-Zerlegung bezüglich der Unterteilung $AC|BD$.
$|\psi\rangle = \alpha_1\,|\Phi^+\rangle_{AB}\,|\Phi^+\rangle_{CD} + \alpha_2\,|\Phi^-\rangle_{AB}\,|\Phi^-\rangle_{CD} + \alpha_3\,|\Psi^+\rangle_{AB}\,|\Psi^+\rangle_{CD} + \alpha_4\,|\Psi^-\rangle_{AB}\,|\Psi^-\rangle_{CD}$,
$\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i \alpha_i^2 = 1$

Aufgabe 2: Lokale Operatoren und lokale Ränge[1]

Zeigen Sie, dass für

$$|\phi\rangle_{A_1A_2} = M_1 \otimes M_2\,|\psi\rangle_{A_1A_2} \tag{1}$$

(mit M_i einer beliebigen $d_i \times d_i$-Matrix und d_i der Dimension von System A_i) gilt, dass $\mathrm{rank}(\varrho^{\phi}_{A_i}) \leq \mathrm{rank}(\varrho^{\psi}_{A_i})$ für $i \in \{1,2\}$, wobei hier $\varrho^{\phi}_{A_i}$ ($\varrho^{\psi}_{A_i}$) die reduzierte Dichtematrix von $|\phi\rangle_{A_1A_2}$ ($|\psi\rangle_{A_1A_2}$) für System A_i ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass M_i geschrieben werden kann als $\sum_{j=1}^{d_i} \left|\mu_i^j\right\rangle\!\left\langle a_i^j\right|$, wobei hier $\left|\mu_i^j\right\rangle$ weder normiert noch linear unabhängig sein müssen und $\{\left|a_i^j\right\rangle\}$ die lokale Schmidt-Basis für System A_i ist. Betrachten Sie, $M_1 \otimes \mathbb{1}\,|\psi\rangle_{A_1A_2}$.

Literatur

[1] W. Dür, G. Vidal and J. I. Cirac, Phys. Rev. A, **62**, 062314 (2000)