Übungen zu Grundlagen der Quantenmechanik SS 2017

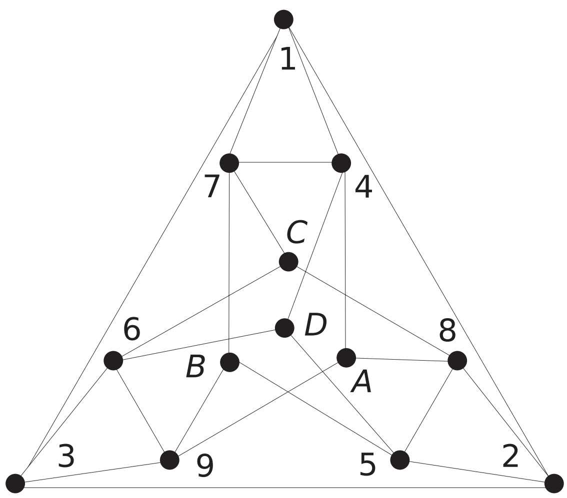
Prof. Dr. O. Gühne, C. Spee, J. Hoffmann

Blatt 5 — Ausgabe: Mi, 31.05.2017 — Abgabe: Mi, 14.06.2017

Aufgabe 1: Zustandsabhängige Kontextabhängigkeit [1]

Gegeben sei folgendes Szenario. Wir betrachten die 13 Observablen (mit Eigenwerten ± 1) $A_i = \mathbb{1} - 2\,|v_i\rangle\langle v_i|$, wobei die Vektoren v_i in der folgenden Tabelle angegeben sind. In folgendem Graph sind Observablen, die kommutieren durch Linien verbunden.

$v_1 = (1,0,0)$	$v_5 = (1,0,-1)$	$v_A = (-1,1,1)$
$v_2 = (0,1,0)$	$v_6 = (1,-1,0)$	$v_B = (1,-1,1)$
$v_3 = (0,0,1)$	$v_7 = (0,1,1)$	$v_C = (1,1,-1)$
$v_4 = (0,1,-1)$	$v_8 = (1,0,1)$	$v_D = (1,1,1)$
	$v_9 = (1,1,0)$	



a) Unter der Annahme von Nichtkontextualität kann man zeigen, dass

$$\sum_i \langle a_i\rangle - \frac{1}{4}\sum_{i,j} \Gamma_{ij}\langle a_i a_j\rangle \leq 8, \tag{1}$$

wobei $\Gamma_{ij} = 1$ falls die entsprechenden Knoten im Graph mit einer Linie verbunden sind und $\Gamma_{ij} = 0$ sonst (insbesondere Γ_{ii}) und $a_i \in \{1,-1\}$. Argumentieren Sie, wie Sie diese Schranke beweisen würden.

b) Berechnen Sie für die oben angegebenen Observablen A_i den Operator

$$L = \sum_i A_i - \frac{1}{4}\sum_{i,j} \Gamma_{ij} A_i A_j \tag{2}$$

und argumentieren Sie warum daher die Quantenmechnik kontextabhängig ist.

Aufgabe 2: Tensorprodukt

Geben Sie $A \otimes B$ und $B \otimes A$ als Matrix in der Standardbasis an.

(i) $A = \alpha\sigma_x + \beta\sigma_y$ und $B = \gamma\sigma_z + \mathbb{1}$;

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha^* & b & \gamma \\ \beta^* & \gamma^* & c \end{pmatrix} \tag{4}$$

(jeweils angegeben in der Standardbasis);

(iii) $A = a\,|{+}\rangle\langle{+}| + b\,|{-}\rangle\langle{-}|$ mit $|\pm\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ und $B = \sigma_y \otimes \sigma_y$.

Aufgabe 3: Zustände in Produkträumen

a) Bestimmen Sie, ob folgende Zustände Produktzustände oder verschränkte Zustände sind:

(i) $|\Psi\rangle = \alpha\,|00\rangle + i\beta\,|11\rangle + i\alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$;

(ii) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{+}\rangle + |{|}\rangle)$;

(iii) $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle - |001\rangle - |011\rangle)$.

b) Zeigen Sie, dass für $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ gilt $(X \otimes X)\,|\Psi^-\rangle = \det(X)\,|\Psi^-\rangle$, wobei X hier eine beliebige 2×2-Matrix ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ gilt $(X \otimes \mathbb{1})\,|\Phi^+\rangle = (\mathbb{1} \otimes X^T)\,|\Phi^+\rangle$ und dass $X\sigma_y X^T = \det(X)\sigma_y$.

Literatur

[1] S. Yu, C. H. Oh: State-Independent Proof of Kochen-Specker Theorem with 13 Rays., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 030402 (2012)