
Aufgabe 1: Tsallis-Entropie

a) Zeigen Sie, dass die Tsallis-Entropie S_q^T für $q \to 1$ in die Shannon-Entropie übergeht.

b) Für $q \in [2n-1, 2n]$, $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende entropische Unschärferalation [1]:

$$S_q^T(\sigma_x) + S_q^T(\sigma_y) \geq \frac{1 - 2^{1-q}}{q-1}.$$

Geben Sie die entsprechenden Terme für den Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle)$ und $q = 2$ an.

Aufgabe 2: Unschärfe von Messungen

a) Geben Sie die Unschärferelation

$$S(A) + S(B) \geq -2\log(c),$$

für die folgenden Beispiele an.

i) $A = \sigma_x$, $B = \sigma_y$, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$

ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\varrho = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|$, mit $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |2\rangle)$

b) Geben sie für die oben angegebenen Beispiele der Observablen jeweils einen Zustand an, für den die Schranke optimal ist.

Aufgabe 3: Simple Hardy-like proof of quantum contextuality [2]

Gegeben seien fünf Boxen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Box i leer und Box j voll sei, sei gegeben durch $p(01|ij)$. Das System sei im folgenden so präpariert, dass

$$p(01|12) + p(01|23) = 1, \tag{1}$$

und

$$p(01|34) + p(01|45) = 1, \tag{2}$$

erfüllt sind. Diese Gleichungen lassen sich umschreiben zu

$$p(11|12) = p(00|23) = 0 \tag{3}$$

und

$$p(11|34) = p(00|45) = 0. \tag{4}$$

a) Argumentieren Sie unter Annahme von Nichtkontextualität, dass für diesen Fall

$$p(01|51) = 0 \tag{5}$$

erfüllt sein muss.

b) Zeigen Sie, dass im folgenden Szenario Gl. 1 und 2 erfüllt sind, Gl. 5 jedoch verletzt ist.
Gegeben sei der Zustand $|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Das Öffnen der Box i sei repräsentiert durch die Messung $\{P_0 = \mathbb{1} - |v_i\rangle\langle v_i| \ , \ P_1 = |v_i\rangle\langle v_i|\}$, wobei hier P_0 mit dem Messergebnis 0 und P_1 mit 1 assoziiert ist und die Vektoren $|v_i\rangle$ gegeben sind durch:

$$\begin{aligned}
|v_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T \\
|v_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T \\
|v_3\rangle &= (0,0,1)^T \\
|v_4\rangle &= (1,0,0)^T \\
|v_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T
\end{aligned}$$

Literatur

[1] O. Gühne, M. Lewenstein: Entropic uncertainty relations and entanglement, *Phys. Rev. A* **70**, 022316 (2004)

[2] A. Cabello, P. Badziag, M. T. Cunha, M. Bourennane: Simple Hardy-like proof of quantum contextuality, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 180404 (2013)