Prof. Dr. O. Gühne, C. Spee, J. Hoffmann

Blatt 3 — Ausgabe: Mi, 17.05.2017 — Abgabe: Mi, 24.05.2017

Aufgabe 1: Unschärferelationen

a) Bestimmen Sie die Unschärferelation von Heisenberg, sowie von Schrödinger

(i) für den Orts- und Impulsoperator.

(ii) für die Observablen σ_x, σ_y und den Zustand $|\Psi\rangle = p\,|0\rangle + \sqrt{1-p^2}e^{i\alpha}\,|1\rangle$ in Abhängigkeit von $0 \leq p \leq 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) für $x_H(t)$ und $x_H(0)$, wobei $x_H(t) = e^{iHt/\hbar}xe^{iHt/\hbar}$ der Ortsoperator im Heisenbergbild für ein freies Teilchen sei.

b) Zeigen Sie, dass ein Gaußsches Wellenpaket $\Psi(x) = Ne^{-\mu x^2+\nu x}$ mit N einer Normierungskonstanten, $\mu > 0$ und $\nu \in C$, ein Zustand minimaler Unschärfe ist. Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$ für $a > 0$.

Aufgabe 2: Hadamard-Ungleichung

a) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $M \geq 0$ gilt

$$\prod_i m_{ii} \geq \det(M) \tag{1}$$

wobei hier $m_{ii} = (M)_{ii}$. Hinweis: Verwenden Sie, dass für ein positiv definite $n\times n$-Matrix A und $D = diag(\sqrt{a_{11}}, \ldots, \sqrt{a_{nn}}$ mit $a_{ii} = (A)_{ii}$ gilt $D^{-1}AD^{-1} > 0$. Beachte Sie, dass $\mathrm{tr}(D^{-1}AD^{-1}) = n$.

b) Berechnen Sie die asymmetrische Kovarianzmatrix für $sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und den Zustand $|+\rangle$ und geben Sie für diesen Fall explizit die Hadamard-Ungleichung an.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Shannon-Entropie

a) Zeigen Sie, dass die Shannnon-Entropie folgende Eigenschaften erfüllt:

   (i) Für Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_N)$ gilt $S(\mathcal{P}) \leq \log(N)$. Der maximale Wert wird erreicht, wenn $\mathcal{P}$ die Gleichverteilung ist;

   (ii) Die Shannon-Entropie ist konkav;

   (iii) Die Shannon-Entropie ist additiv. Es gilt $S(\mathcal{P}) = S(\mathcal{Q}) + S(\mathcal{R})$, wobei hier $\mathcal{Q} = (q_1, \ldots, q_n), \mathcal{R} = (r_1, \ldots, r_m)$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind und $\mathcal{P} = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1m}, p_{21}, p_{22} \ldots, p_{nm})$ mit $p_{ij} = q_i r_j$.