

**Aufgabe 1: Verallgemeinerte Messungen Teil 1**

a) Gegeben seien folgende Operatoren. Überprüfen Sie, ob diese gültigen Effekten eines POVMs entsprechen.

(i)

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

und

$$E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

(ii)

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\vartheta) \\ 0 & -\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

und

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

wobei  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ;

(iii)

$$E_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -i(2p-1) \\ i(2p-1) & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & i(2p-1) \\ -i(2p-1) & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

und

$$E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

mit  $0 \leq p \leq 1$ ;

(iv)

$$E_1 = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 9 & -6i & 3 \\ 6i & 4 & 2i \\ 3 & -2i & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

und

$$E_2 = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 6i & -3 \\ -6i & 10 & -2i \\ -3 & 2i & 13 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

b) Unter der Voraussetzung, dass (i) bzw. (ii) im Unterpunkt a) einem gültigen POVM entspricht, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Messergebnisse für folgende Anfangszustände und geben Sie jeweils einen möglichen Zustand nach der Messung an.

(i)  $|\psi\rangle = q|0\rangle + \sqrt{1-q^2}|1\rangle$ , wobei  $0 \leq q \leq 1$

(ii)  $\varrho = \lambda|0\rangle\langle 0| + (1-\lambda)|\psi\rangle\langle\psi|$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$  und  $|\psi\rangle$  wie unter (i) angegeben.

## Aufgabe 2: Verallgemeinerte Messungen Teil 2

a) Gegeben sei folgender Messoperator

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Geben Sie einen Messoperator an, sodass dieser zusammen mit  $M_1$  eine verallgemeinerte Messung bildet.

b) Gegeben sei ein POVM mit  $n$  Effekten  $E_i$ . Zeigen Sie, dass die Operatoren  $\tilde{E}_1 = E_1 + E_2$  und  $\tilde{E}_j = E_{j+1}$  für  $j \in \{2, \dots, n-1\}$  gültigen Effekten eines POVMs mit  $n-1$  möglichen Messergebnissen entsprechen.

## Aufgabe 3: Neumark-Erweiterung

Gegeben seien folgende Effekte eines Qubit-POVMs,

$$\begin{aligned} E_1 &= p|0\rangle\langle 0|, \\ E_2 &= q|1\rangle\langle 1|, \\ E_3 &= (1-p)|0\rangle\langle 0|, \\ E_4 &= (1-q)|1\rangle\langle 1|, \end{aligned}$$

mit  $0 \leq p \leq 1$  und  $0 \leq q \leq 1$ . Geben sie eine von-Neumann-Messung auf einem erweiterten Hilbertraum an, durch die diese verallgemeinerte Messung implementiert werden kann.