**Übungen zu Grundlagen der Quantenmechanik** SS 2017

Prof. Dr. O. Gühne, C. Spee, J. Hoffmann

*Blatt 1* — Ausgabe: Mi, 03.05.2017 — Abgabe: Mi, 10.05.2017

---

## Aufgabe 1: Zeitentwicklung

a) Wir betrachten im Folgenden ein Zwei-Niveau-System, dessen Hamiltonoperator gegeben sei durch $H = \hbar\omega\sigma_z$ mit $\omega \in \mathbb{R}$. Hier und im Folgenden bezeichnen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Pauli-Matrizen. Zum Zeitpunkt $t_0$ sei das System im Zustand $|\psi(t_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Berechnen Sie den Zustand zur Zeit $t \geq t_0$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\sigma_x$ und $\sigma_z$ zum Zeitpunkt $t$.

## Aufgabe 2: Messung und Erwartungswert

a) Berechnen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte folgender Observable

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -i\sin(\alpha) & 0 \\ i\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und schreiben Sie diese in Spektralzerlungung ($A = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle\langle a_i|$ mit $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$) auf.

b) Wir betrachten im Folgenden die Messung von $A$ im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle+|1\rangle+|2\rangle)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, die verschiedenen Messwerte zu erhalten, sowie den Erwartungswert von $A$.

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 3: Dichtematrizen und Blochkugel Teil 1**

a) Zeigen Sie, dass für eine hermitesche $2 \times 2$-Matrix $A = (a_{ij})$ folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) A hat keine negativen Eigenwerte;

   (ii) $\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0$ für alle Vektoren $|\psi\rangle$;

   (iii) $\det(A) \geq 0$, $a_{11} \geq 0$ und $a_{22} \geq 0$.

b) Betrachten Sie nun eine Qubit-Dichtematrix in der Blochdarstellung $\varrho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z)$. Bestimmen Sie die Werte von $\vec{r}$, für die die Dichtematrix positiv semidefinit ist.

*Bitte wenden!*

## Aufgabe 4: Dichtematrizen und Blochkugel Teil 2

a) Geben Sie an, ob folgende Matrizen Dichtematrizen entsprechen. Falls ja, bestimmen sie, ob der jeweilige Zustand rein ist.

(i)
$$\varrho_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 3 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

(ii)
$$\varrho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - 2i \\ \frac{3}{2} + 2i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \tag{3}$$

(iii)
$$\varrho_2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\vartheta) & \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)e^{-i\varphi} \\ \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)e^{i\varphi} & \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$;

(iv)
$$\varrho_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{40} & -\frac{i}{100} \\ \frac{i}{100} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

(v)
$$\varrho_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (2p-1) \\ 2p-1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

mit $0 \leq p \leq 2$.

b) Berechnen Sie den Blochvektor folgender Dichtematrix

$$\varrho = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}, \tag{7}$$

wobei $a, c \in \mathbb{R}$, $a + c = 1$ und $\sqrt{(a-c)^2 + |b|^2} \leq 1$.

c) Zeigen Sie, dass für orthogonale Zustände eines Qubits $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ für die zugehörigen Blochvektoren $\vec{r}_\phi, \vec{r}_\psi$ gilt, dass $\vec{r}_\phi = -\vec{r}_\psi$.