Abgabe des Übungsblattes: Dienstag, 19. Mai 2015

16. Der Zerlegungssatz

Im Folgenden wollen wir den Zerlegungssatz beweisen. Dieser besagt, dass ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \vec{a}_t(\vec{r})$, das mit seinen Ableitungen für große Abstände hinreichend rasch gegen null geht, eindeutig in einen wirbelfreien Teil $\operatorname{rot}\vec{a}_\ell(\vec{r}) = 0$, und einen quellenfreien Teil $\operatorname{div}\vec{a}_t(\vec{r}) = 0$ zerlegt werden kann. Dabei gilt:

$$\vec{a}_\ell(\vec{r}) = \operatorname{grad}\alpha(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \alpha(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\operatorname{div}\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{1}$$

$$\vec{a}_t(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{\beta}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie folgende Relation:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_r\,\operatorname{rot}_r\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}. \tag{3}$$

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_r\,\operatorname{rot}_r\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{a}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \vec{a}_t(\vec{r}). \tag{4}$$

(3 Punkte)

Hinweis: Folgende Relationen könnten nützlich sein:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{5}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\operatorname{grad}\varphi \tag{7}$$

$$\int\limits_V \mathrm{d}^3r\,\operatorname{rot}\vec{A} = \int\limits_{\partial V}\mathrm{d}f\times\vec{A} \tag{8}$$

17. Stromdurchflossener Kreisring

(a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte eines stromdurchflossenen Kreisrings mit Radius R für einen Punkt auf der Achse des Rings im Abstand a vom Mittelpunkt. Diskutieren Sie die Grenzfälle $a \ll R$ und $a \gg R$.

(3 Punkte)

(b) Zwei gleichartige, scheibenförmige Spulen mit N Windungen, deren Höhe gegen ihren Radius R vernachlässigbar ist, sind so angeordnet, dass sie die z-Achse als gemeinsame Symmetrieachse haben und ihr Abstand gleich 4a ist. Die erste Spule befindet sich an der Position $(0, 0, -a)$ und wird vom Strom I durchflossen. Die zweite Spule befindet sich bei $(0, 0, 3a)$, und in ihr fließt der Strom $-8I$.Wie muss a gewählt werden, damit B an der Position z $= 0$ verschwindet?

(3 Punkte)

18. Magnetfeld eines stromdurchflossenen Hohlzylinders

Ein unendlich langer Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius $R_2 > R_1$ wird homogen vom Strom I durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ im ganzen Raum. Skizzieren Sie $|\vec{B}|$ als Funktion des Abstands von der z-Achse.

(3 Punkte)