Theoretische Physik: Elektrodynamik
Übungsblatt 6

Vorlesung: Matthias Kleinmann   Übungen: Cornelia Spee, Michael Gaida, Jonathan Steinberg
Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308)
Übungen: Fr. 8:30–10:00 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 21.05.2019

1. Randwertproblem mit azimuthaler Symmetrie [6 Punkte]

Für Probleme mit azimuthaler Symmetrie ist die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung ϕ-unabhängig ($m = 0$) und lautet:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]P_l(cos\theta), \tag{1}$$

wobei $P_l(\cos\theta) = P_l^{m=0}(\cos\theta)$ die Legendre'schen Polynome bezeichnen. Im Folgenden betrachten wir eine leitende Hohlkugel mit Radius a, deren beide Hälften duch einen isolierenden Ring in der Ebene $z = 0$ voneinander getrennt sind. Die obere Halbkugel befinde sich auf dem Potenzial $+V$ und die untere auf dem Potenzial $-V$. Bestimmen Sie das Potenzial $\Phi(r,\theta)$ der Kugel, indem Sie die Entwicklungskoeffizienten A_{lm} und B_{lm} aus den Randbedingungen bei $r = 0$, $r = a$ und $r \to \infty$ bestimmen.

Hinweis: Machen Sie die Fallunterscheidung $r < a$ und $r > a$. Folgende Formel kann Ihnen bei der Berechnung der Koeffizienten von Nutzen sein:

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \frac{(-1)^{(l-1)/2}(l-1)!}{2^l((l+1)/2)!((l-1)/2)!}, \qquad l \text{ ungerade.} \tag{2}$$

2. Plattenkondensator mit Dielektrikum [2+2+2 Punkte]

Gegeben sei ein Plattenkondensator mit der Fläche $F = a \times b$ und Plattenabstand d. Der Raum zwischen den Kondensatorplatten sei teilweise mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_r > 1$ belegt. Wir nehmen an, dass das Dielektrikum parallel zu den Kondensatorplatten bis zu einer Länge x eingeschoben wird und damit eine Teilfläche $x \times b$ des Kondensatorzwischenraums bedeckt. Der restliche Bereich zwischen den Kondensatorplatten sei leer. Die Ladung auf den Platten sei jeweils durch Q, bzw. $-Q$, gegeben.

(i) Berechnen Sie das $\boldsymbol{E}$- und das $\boldsymbol{D}$-Feld im gesamten Bereich zwischen den Kondensatorplatten.

(ii) Berechnen Sie die elektrostatische Feldenergie W.

(iii) Bestimmen Sie, aus der Energieänderung beim Verschieben des Dielektrikums um ein infinitesimales Längenelement dx, die auf das Dielektrikum wirkende Kraft.

3. Magnetfeld zweier paralleler Leiter [3+3 Punkte]

Wir betrachten einen unendlich langen Leiter mit zylindrischem Querschnitt (Radius R), innerhalb dessen ein Strom mit konstanter Stromdichte $\boldsymbol{j} = j_0\hat{\boldsymbol{e}}_z$ in z-Richtung fließt.

(i) Berechnen Sie die magnetische Induktion innerhalb und außerhalb des Leiters. Nehmen Sie dabei an, dass das Magnetfeld im Inneren des Leiters noch um einen Faktor μ (magnetische Permeabilität) verstärkt ist.

Bitte wenden!

Betrachten wir nun zwei unendlich lange parallele Leiter mit gleichem Radius R und Abstand d voneinander. Die Stromdichte in beiden Leitern sei wiederum homogen und vom gleichen Betrag j_0.

(ii) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ für jeden Punkt auf der x-Achse innerhalb und außerhalb der Leiter für parallele und gegenläufige Ströme. Skizzieren Sie das Ergebnis.

4. Kraft einer Leiterschleife auf sich selbst [3 Punkte]

Eine stromdurchflossene, ebene (infinitesimal dünne) Leiterschleife erzeugt eine magnetische Induktion $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$. Berechnen Sie das Drehmoment, das die Leiterschleife auf sich selbst ausübt.